6 Chapter Six الباب السادس

Force and Motion (II) القوة والحركة (II)

6-1: مقدمة Introduction

درسنا في الفصل السابق قوانين نيوتن، ودرسنا أيضاً بعض التطبيقات على تلك القوانين من خلال دراستنا لديناميكا الحركة في خط مستقيم وقوة الاحتكاك وحركة الأجسام داخل المصعد. في هذا الباب سوف ندرس ثلاثة مواضيع: ديناميكا الحركة الدائرية المنتظمة، وديناميكا الحركة الدائرية الغير منتظمة، وأخيراً سوف ندرس حركة الأجسام في وسط يقاوم أو يعيق الحركة (الوسط اللزج).

6-2: ديناميكا الحركة الدائرية المنتظمة Dynamics of Uniform Circular Motion

درسنا في البند السادس من الباب الرابع 4-6 أن الجسم المتحرك بسرعة منتظمة في مسار دائري نصف قطره r يكتسب تسارعاً مركزياً $\vec{a}_r$ اتجاهه نحو مركز المسار وعمودياً على اتجاه السرعة وذلك نتيجة التغير المسرعة. وعرفنا أن مقدار هذا التسارع

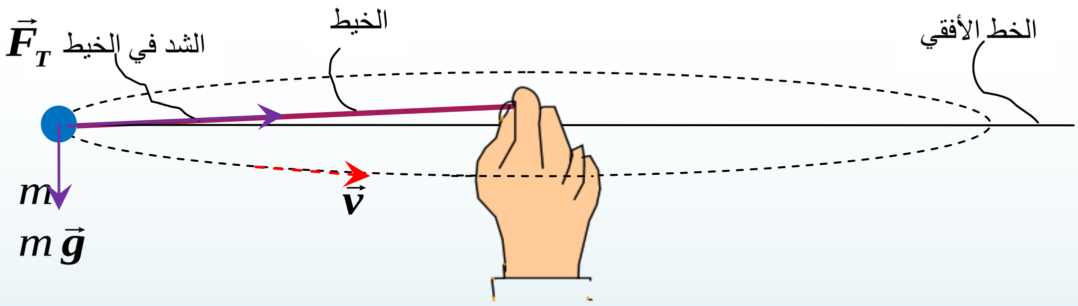
$$a_r = \frac{v^2}{r}$$

بحسب قانون نيوتن الثاني $\left(\sum \vec{F} = m\vec{a}\right)$، فإن أي جسم يسير بتسارع لا بد من وجود محصلة قوى تعمل عليه اتجاهها يكون باتجاه التسارع. وبناءً على ذلك فإن جسماً يتحرك بمسار دائري لا بد من وجود محصلة قوى تعمل عليه باتجاه عمودي على اتجاه سرعته لتكسبه تسارعاً مركزياً . إن محصلة هذه القوى تسمى القوة المركزية centripetal force، ونرمز لها بالرمز $\vec{F}_r$ حيث إن الحرف السفلي r جاء من radial direction (**الحركة الدائرية لا تتم إلا إذا توفرت قوة مركزية**). إن مقدار محصلة هذه القوى يمكن حسابه من خلال قانون نيوتن الثاني

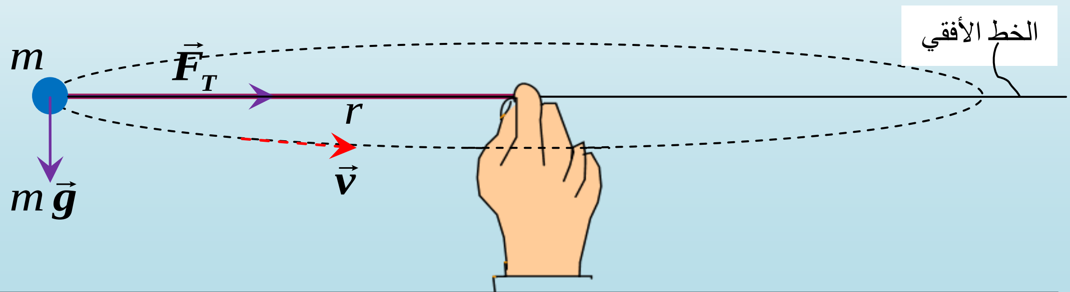
$$F_r = m a_r = m\frac{v^2}{r} \qquad \text{.........................} \ (6\text{-}1)$$

إن المعادلة 6-1 ليست قانوناً للقوة المركزية، ولكنها تطبيق لقانون نيوتن الثاني لإيجاد مقدار واتجاه قوة موجودة أصلاً كما سنلاحظ من خلال الأمثلة والأشكال التي سنوردها بعد هذا التوضيح مثل قوة الشد في خيط، أو قوة احتكاك أو قوة جاذبية. فوجود مثل هذه القوى يعمل على منع الجسم من التصرف حسب قانون نيوتن الأول، لاحظ الشكل 6-1c. فأي جسم يميل لأن يبقى على الحالة التي هو فيها، والحالة هذه هي السير بخط مستقيم باتجاه السرعة التي هو فيها ولكن وجود قوة سميناها قوة مركزية تمنعه من ذلك. إذن القوة المركزية هي وصف لقوة موجودة أصلاً تعمل باستمرار بشكل عمودي على اتجاه سرعته لتمنعه من أن يتصرف حسب قانون نيوتن الأول فتبقيه في مساره الدائري من خلال التغير المستمر في اتجاه سرعته. القوة المركزية في حالة حركة الأرض حول الشمس هي قوة الجاذبية بين الأرض والشمس، فالقوة المركزية هي وصف لهذه القوة الجاذبة بين الأرض والشمس. القوة التي تمنع انزلاق قطعة نقد موضوعة على قرص دوار هي قوة الاحتكاك، فقوة الاحتكاك هنا هي القوة المركزية.

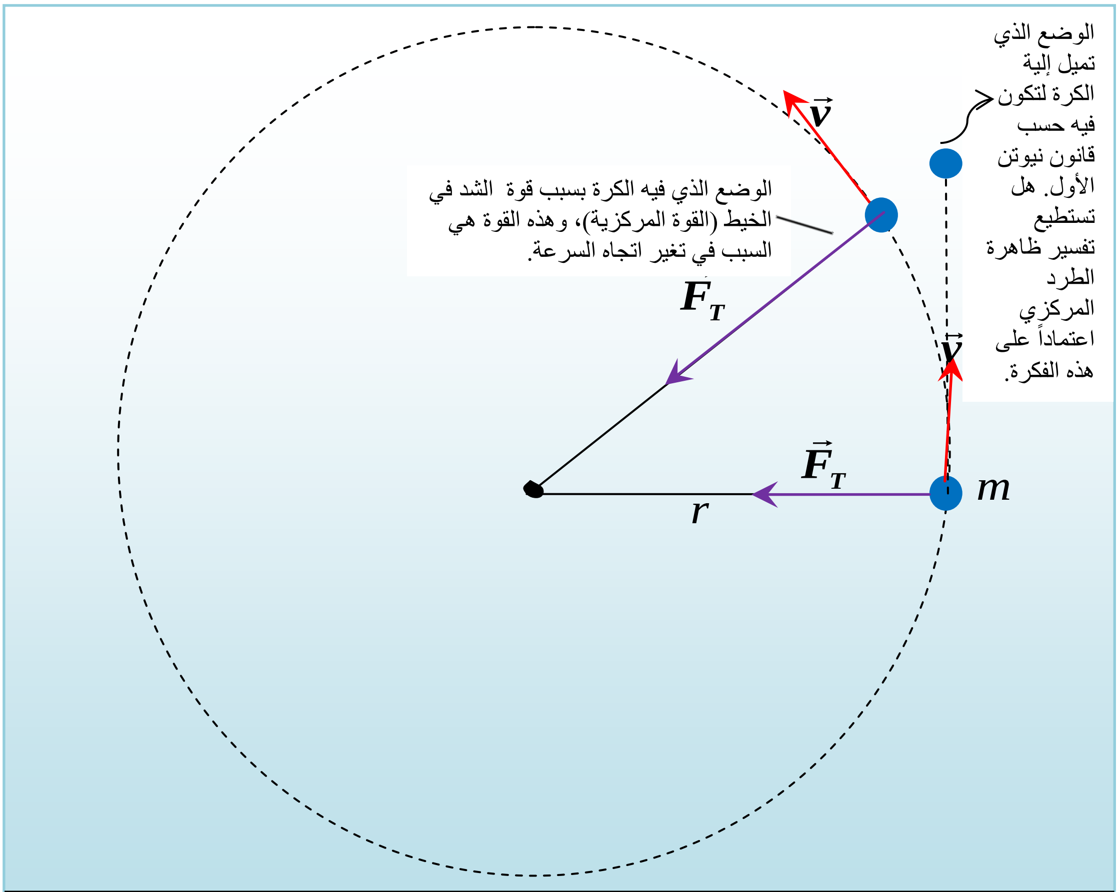
الشكل 6-1 يبين كرة كتلتها m مربوطة بطرف خيط يدورها شخص من خلال تلويحه بالخيط بشكل أفقي من نقطة تبعد مسافة r عن نقطة ربط الكرة . إن القوة المركزية (قوة الشد في الخيط في المثال السابق) تعمل على تغيير اتجاه السرعة مسببة التسارع المركزي. فإذا انقطع الخيط فسوف تتلاشى القوة المركزية فوراً الأمر الذي يجعل الكرة تسلك المسار عبر خط مستقيم وهو ما تميل إليه حسب قانون نيوتن الأول.



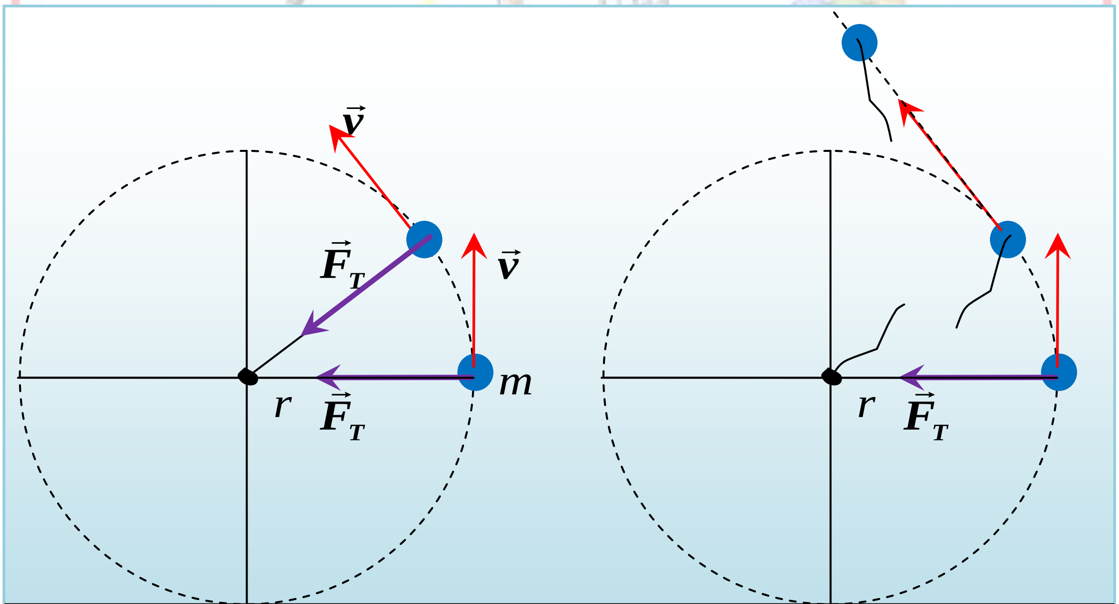
الشكل 6-1a : الوضع الطبيعي للحركة. لاحظ ميلان الخيط بسبب وزن الكرة.



الشكل 6-1b : الوضع التقريبي للحركة. الشد في الخيط هنا هو القوة المركزية.



الشكل1c-6: منظر علوي للشكل 1a-6. قوة الشد في الخيط هنا تمثل القوة المركزية فتعمل هذه القوة على منع الكرة من أن تسلك المسار على خط مستقيم فتجبرها على تغيير اتجاه سرعتها باستمرار عند كل لحظة زمنية. (لقد تم اختيار نقطتين متباعدتين فقط للتوضيح).



الشكل1d-6: منظر علوي مصغر للشكل 1a-6. قوة الشد في الخيط هنا تمثل القوة المركزية فتعمل على المحافظة على مسار الكرة الدائري، ولكن عند انقطاع الخيط تختفي القوة المركزية فتسير الكرة في خط مستقيم ماس للدائرة عند تلك اللحظة.

خلاصة الموضوع أن الحركة الدائرية لا تتم إلا إذا توفرت قوة نسميها القوة المركزية تعمل على الجسم المتحرك باستمرار باتجاه عمودي على اتجاه سرعته، وهذه القوة قد تكون قوة الجاذبية، أو قوة الاحتكاك، أو قوة شد في خيط. ويُحسب مقدارها من خلال المعادلة 6-1. وتاليا بعض الأمثلة لتوضيح الفكرة.

مثال 1 أثر شخص بقوة على خيط من أجل أن يُدَوِر بمسار دائري أفقي كرة كتلتها 0.3 kg مربوطة بطرف الخيط الآخر الشكل (1-6). أوجد قوة الشد في الخيط إذا كان نصف قطر المسار 40cm والكرة تدور دورتين في الثانية.	**Examples 1** A person exert a force on a string attached to a 0.3 kg ball to make the ball revolve uniformly in a horizontal circle of radius 40cm as in Fig (6-1). Find the tension in the string if the ball makes two revolutions per second.

الحل: مخطط الجسم الحر للكرة مبين في الشكل 6-1b.

قوة الشد في الخيط التي يؤثر بها الخيط على الكرة باتجاه إصبع اليد مركز المسار الدائري تساوي في المقدار وتعاكس في الاتجاه القوة التي يؤثر بها الشخص على الخيط.

القوة المركزية التي تسبب الحركة الدائرية هي قوة الشد في الخيط.

$$F_r = F_T = ma_r = m\frac{v^2}{r}$$

مقدار الكتلة موجود، ومقدار نصف القطر موجود، أما السرعة فنحسبها من العلاقة

$$v = \frac{2\pi r}{\tau} = 2\pi rf = (2)(3.14)(0.4\mathrm{m})(2\mathrm{s}^{-1}) = 5.02\,\mathrm{m/s}$$

حيث τ زمن دورة واحدة ويساوي $\frac{1}{f}$، و f التردد أو عدد الدورات في الثانية.

$$F_r = F_T = m\frac{v^2}{r} = (0.3\mathrm{kg})\times\frac{25.2(\mathrm{m/s})^2}{0.4\mathrm{m}} = 18.9\mathrm{N}$$

<u>Examples 2</u> In example 1, (a) Find the tension in the string if the speed of the ball is 7m/s (b) if the string can withstand a maximum tension of 60 N, what is maximum speed the ball can have before the string breaks.	**<u>مثال 2</u>** في المثال الأول، (أ) أحسب الشد في الخيط إذا كانت سرعة الكرة 7m/s (ب) إذا كان الخيط يتحمل قوة شد 60 N دون أن ينقطع، ما هي أقصى سرعة تدور بها الكرة دون أن يسبب ذلك انقطاع في الخيط.

الحل: (أ)

قوة الشد في الخيط $\vec{F}_T$ هي القوة المركزية التي تسبب الحركة الدائرية ومقدارها هو

$$F_r = F_T = ma_r = m\frac{v^2}{r}$$

$$F_T = 0.3\text{kg}\frac{49(\text{m/s})^2}{0.4\text{m}} = 36.75\,\text{N}$$

(ب)

قوة الشد في الخيط $\vec{F}_T$ هي القوة المركزية التي تسبب الحركة الدائرية ومقدارها هو

$$F_r = F_T = ma_r = m\frac{v^2}{r} = 60\text{N}$$

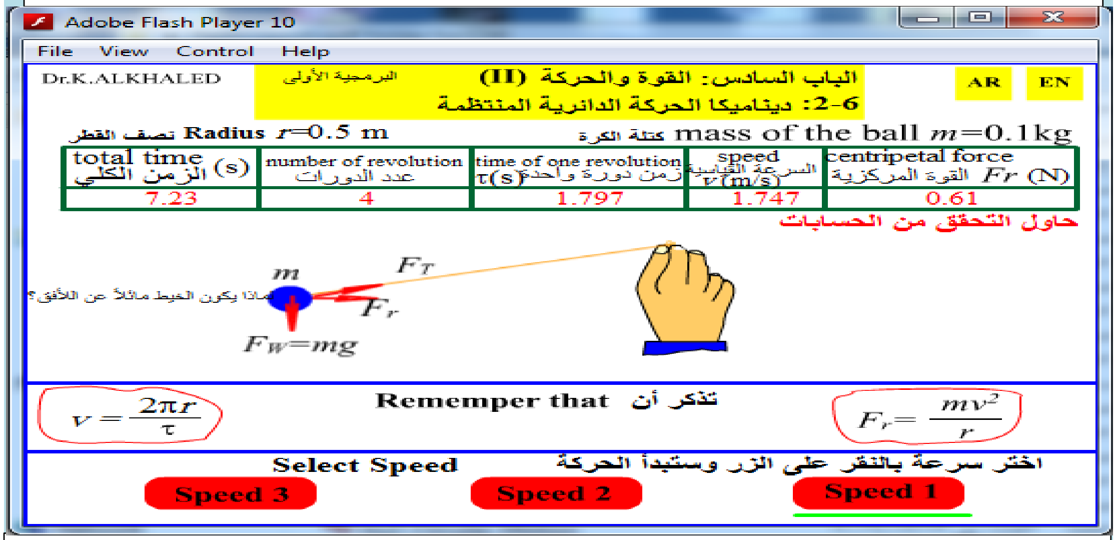
مقدار الكتلة موجود، ومقدار نصف القطر موجود، أما السرعة فتساوي

$$v = \sqrt{\frac{rF_r}{m}} = \sqrt{\frac{(0.4\text{m})\times(60\text{N})}{0.3\text{kg}}} = 8.0\,\text{m/s}$$

ولمزيد من التوضيح ندعوك عزيزي الطالب للرجوع إلى البرمجية الأولى لهذا الباب.

البرمجية الأولى: ديناميكا الحركة الدائرية المنتظمة. Dynamics of Uniform Circular Motion.

صورة عن واجهة البرمجية الأولى للباب السادس وهي بعنوان **ديناميكا الحركة الدائرية المنتظمة. Dynamics of Uniform Circular Motion.**



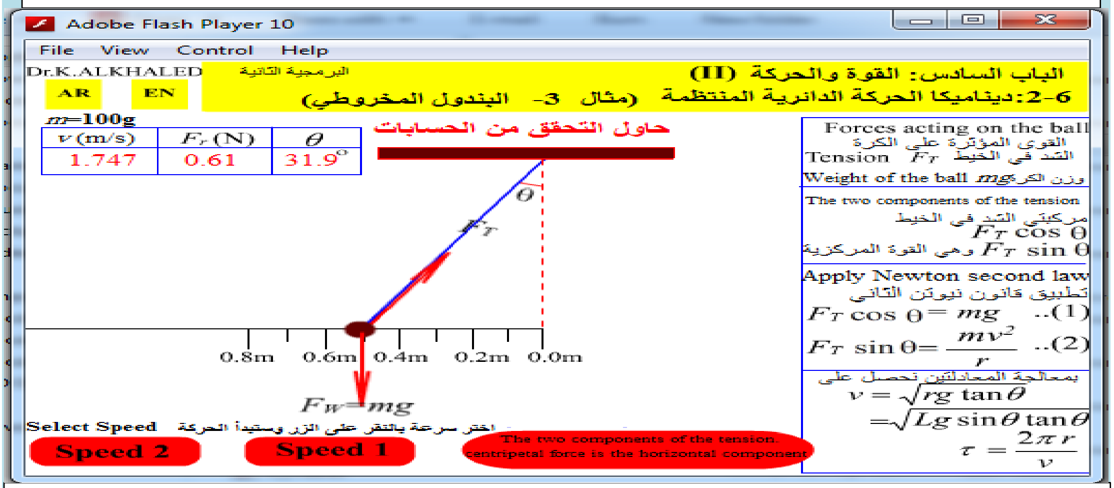
هذه صورة عن واجهة البرمجية الأولى . لاستعمال البرمجية الفعلية ما عليك فعله هو اختيار السرعة من خلال النقر على الزر Speed 1 أو Speed 2 أو Speed 3 ثم مراقبة الحركة والحسابات والتحقق منها.

ولمزيد من التوضيح حول مثال 3 ، ندعوك عزيزي الطالب للرجوع إلى البرمجية الثانية.

البرمجية الثانية بعنوان: البندول المخروطي. The Conical Pendulum

صورة عن واجهة البرمجية الثانية للباب السادس وهي بعنوان **البندول المخروطي.**

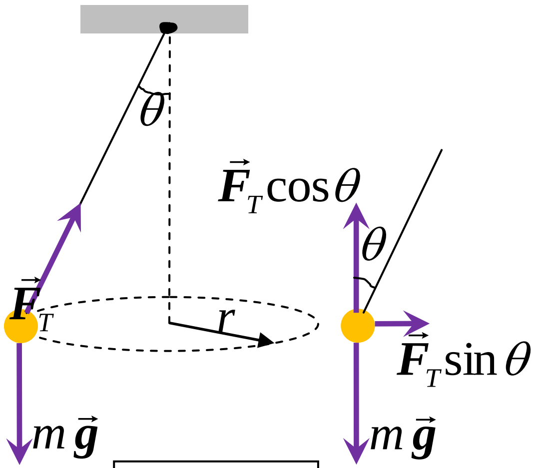
The Conical Pendulum



هذه صورة عن واجهة البرمجية الثانية . لاستعمال البرمجية الفعلية ما عليك فعله هو اختيار السرعة من خلال النقر على الزر Speed 1 أو Speed 2 ثم مراقبة الحركة والحسابات والتحقق منها.

Examples 3 The Conical Pendulum: A small ball of mass m is suspended from a string of length L makes an angle θ with the vertical. The ball is revolves in a horizontal circle of radius r. Find the speed of the ball in term of L, θ and g.

مثال3 البندول المخروطي: كرة صغيرة كتلتها m معلقة من طرف خيط طوله L ويميل الخيط عن الخط العمودي زاوية θ . الكرة تدور في مسار دائري أفقي بسرعة ثابتة v. أوجد سرعة الكرة بدلالة كل من L وθ و g.



الشكل (6-2)

الحل: من خلال تحليل قوة الشد إلى مركبتين أفقية ورأسية، بالإضافة إلى النظر في حركة الكرة نجد أن الكرة لا تتحرك بشكل رأسي وإنما بشكل أفقي وبالتالي فإن مركبة قوة الشد الرأسية تساوي وزن الكرة

$$F_T\cos\theta = mg \quad ....(1)$$

أما المركبة الأفقية فهي المسؤولة عن التسارع المركزي وبالتالي فهي القوة المركزية

$$F_r = F_T\sin\theta = ma_r \Rightarrow F_T\sin\theta = m\frac{v^2}{r} \quad ....(2)$$

بقسمة معادلة (2) على معادلة (1) نحصل على:

$$\tan\theta = \frac{v^2}{rg} \Rightarrow v = \sqrt{rg\tan\theta}$$

وبما إن $\sin\theta = \frac{r}{L}$ فإن السرعة v تكتب كما هو مطلوب

$$v = \sqrt{Lg\sin\theta\tan\theta}$$

Examples 4 The Curved Road-1:

A car of mass $m = 1600\text{kg}$ round a curve on a flat road of radius r as in Fig (6-3). Find the maximum speed the car can have in order to make the turn without skidding if the radius of the curve and the coefficient of static friction between the tires and the pavement is:

(a) $r = 120\text{m}$ and $\mu_s = 0.65$.

(b) $r = 50\text{m}$ and $\mu_s = 0.65$.

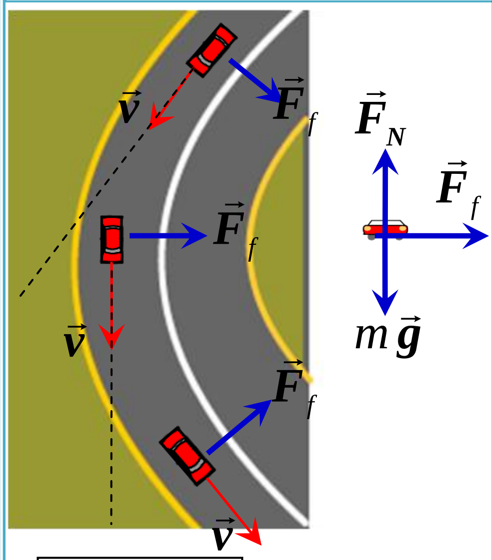
(c) $r = 50\text{m}$ $\mu_s = 0.2$ (the pavement is icy like).

مثال4 الطريق المنحني-1: سيارة كتلتها $m = 1600\text{kg}$ تسير على طريق منحني مستوي نصف قطره r كما في الشكل (6-3) . أوجد أقصى سرعة يمكن أن تسير بها السيارة على المسار المنحني دون أن تنزلق إذا نصف قطر المنحني ومعامل الاحتكاك السكوني بين الإطارات والطريق المزفلت على الترتيب.

(أ) $r = 120\text{m}$ و $\mu_s = 0.65$ (الطريق جاف)

(ب) $r = 50\text{m}$ و $\mu_s = 0.65$ (الطريق جاف)

(ج) $r = 50\text{m}$ و $\mu_s = 0.20$ (حالة شبه انجماد على الطريق)



الشكل (6-3)

الحل: القوة التي ستقي السيارة في المسار المنحني وتعمل على تغيير اتجاه السرعة هي القوة المركزية، وهي هنا قوة الاحتكاك السكوني. ويجب أن تكون قوة الاحتكاك تساوي على الأقل mv^2/r وإلا فإن السيارة ستنزلق، (ستسير على الخط المستقيم المنقط، ولن تستطيع قوة الاحتكاك تغيير اتجاه السرعة).

$$F_{sf} \geq m\frac{v^2}{r}$$

أقصى سرعة للسيارة لتبقى في المسار المنحني

$$F_{sf} = m\frac{v^2_{\max}}{r} \Rightarrow v_{\max} = \sqrt{\frac{rF_{sf}}{m}}$$

ولكن قوة الاحتكاك السكوني تساوي $F_{sf} = \mu_s F_N$

وبما إن السيارة متزنة رأسياً فإن $F_N = mg$ وبالتالي فإن $F_{sf} = \mu_s mg$

$$v_{\max} = \sqrt{\mu_s r g}$$

تابع حل مثال رقم 4

لاحظ إن السرعة لا تعتمد على الكتلة وتعتمد فقط على معامل الاحتكاك ونصف قطر المسار المنحني.

(أ) عندما يكون نصف القطر $r = 120\text{m}$ والطريق جاف $\mu_s = 0.65$

$$v_{max} = \sqrt{0.65 \times 120 \times 9.8} = 27.6\,\text{m/s} = 99.5\,\text{km/hr}$$

(ب) عندما يكون نصف القطر $r = 50\text{m}$ والطريق جاف $\mu_s = 0.65$

$$v_{max} = \sqrt{0.65 \times 50 \times 9.8} = 17.8\,\text{m/s} = 64.2\,\text{km/hr}$$

(ج) عندما يكون نصف القطر $r = 50\text{m}$ والطريق حالة شبه انجماد $\mu_s = 0.2$

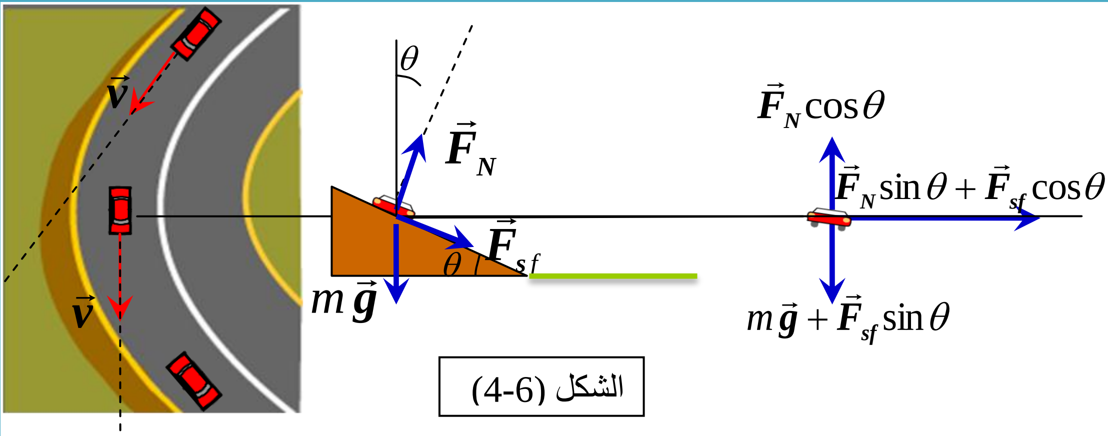
$$v_{max} = \sqrt{0.2 \times 50 \times 9.8} = 9.9\,\text{m/s} = 35.6\,\text{km/hr}$$

Examples 5 The Curved Road-2:

When designing a curved road, it is not enough to rely on friction and billboard speed limit to round the curve without skidding, so the curved road should be banked by an angle θ Fig (6-4). If $\theta = 20^\circ$, Find the maximum speed the car can have in order to make the turn without skidding if the radius of the curve and the coefficient of static friction between the tires and the pavement is: $r = 120\text{m}$ and $\mu_s = 0.66$.

مثال5 الطريق المنحني-2: عند تصميم الطرق السريعة التي تحتوي على منحنيات، لا يكفي الاعتماد على قوة الاحتكاك وإشارات تخفيف السرعة لكي تسير السيارة دون أن تنزلق. لذلك تُصمم الطريق بحيث تكون مائلة باتجاه مركز المنحنى الشكل(6-4) . إذا أصبحت زاوية ميلان الطريق السابق 20°، أوجد أقصى سرعة يمكن أن تسير بها السيارة على المسار المنحني دون أن تنزلق إذا كان نصف قطر المنحني ومعامل الاحتكاك السكوني بين الإطارات والطريق المزفلت على الترتيب.

(أ) $r = 120\text{m}$ و $\mu_s = 0.66$ (الطريق جاف)



الشكل (4-6)

الحل: يجب أن تتوفر محصلة قوة تساوي مقداراً mv^2/r لكي يبقى يتغير اتجاه سرعة السيارة. محصلة القوى التي ستقي السيارة في المسار المنحني هي المركبة الأفقية لقوة الاحتكاك السكوني زائداً المركبة الأفقية للقوة العمودية على السيارة . ويجب أن تكون محصلة القوى تساوي على الأقل mv^2/r وإلا فإن السيارة ستنزلق (ستسير على الخط المستقيم المنقط، ولن تستطيع محصلة القوى تغيير اتجاه سرعة السيارة).

$$F_{sf}\cos\theta + F_N \sin\theta \geq m\frac{v^2}{r}$$

أقصى سرعة للسيارة لتبقى في المسار المنحني

$$F_{sf}\cos\theta + F_N \sin\theta = m\frac{v_{\max}^2}{r} \qquad ....(1)$$

ولكن قوة الاحتكاك السكوني تساوي

$$F_{sf} = \mu_s F_N \qquad ....(2)$$

وبما إن السيارة متزنة رأسياً فإن

$$F_N \cos\theta = mg + F_{sf}\sin\theta$$

$$F_N \cos\theta = mg + \mu_s F_N \sin\theta$$

$$F_N \cos\theta - \mu_s F_N \sin\theta = mg \Rightarrow$$

$$F_N = \frac{mg}{\cos\theta - \mu_s \sin\theta} \qquad ....(3)$$

وبتعويض المعادلتين (2) و (3) في (1) نحصل على

$$v_{\max} = \sqrt{\frac{\mu_s r g\cos\theta + r g\sin\theta}{\cos\theta - \mu_s \sin\theta}}$$

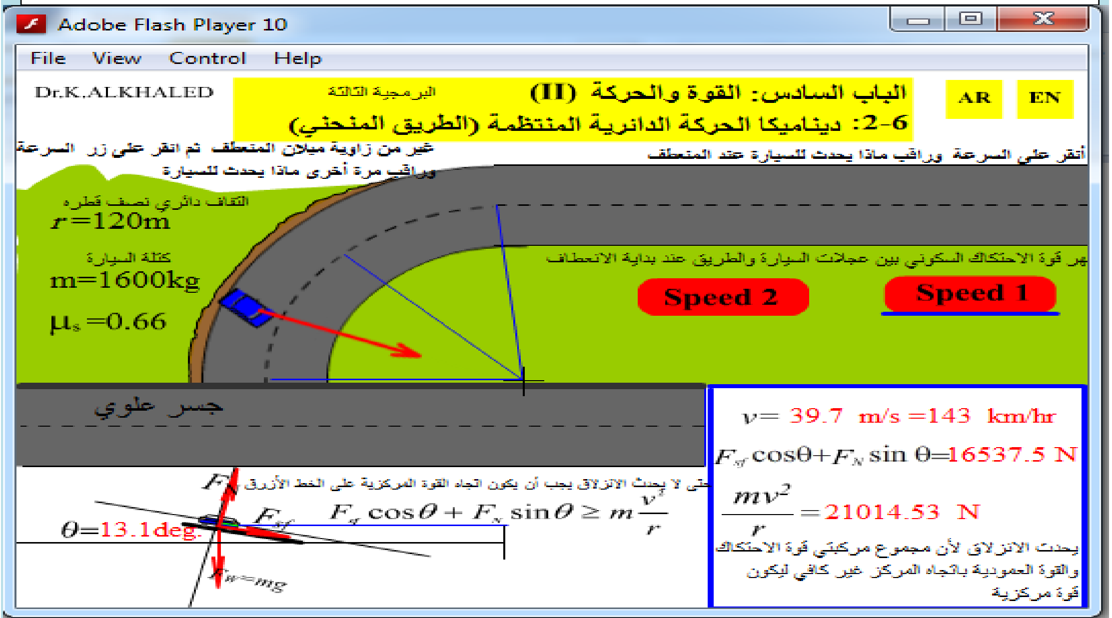
وبتعويض المعطيات نحسب السرعة القصوى

$$v_{\max} = 39.8\,\text{m/s} = 143.0\,\text{km/hr}$$

ولمزيد من التوضيح حول المثالين 4 و 5 ، ندعوك عزيزي الطالب للرجوع إلى البرمجية الثالثة. البرمجية الثالثة بعنوان: الطريق المنحني . The Curved Road

صورة عن واجهة البرمجية الثالثة للباب السادس وهي بعنوان الطريق المنحني .

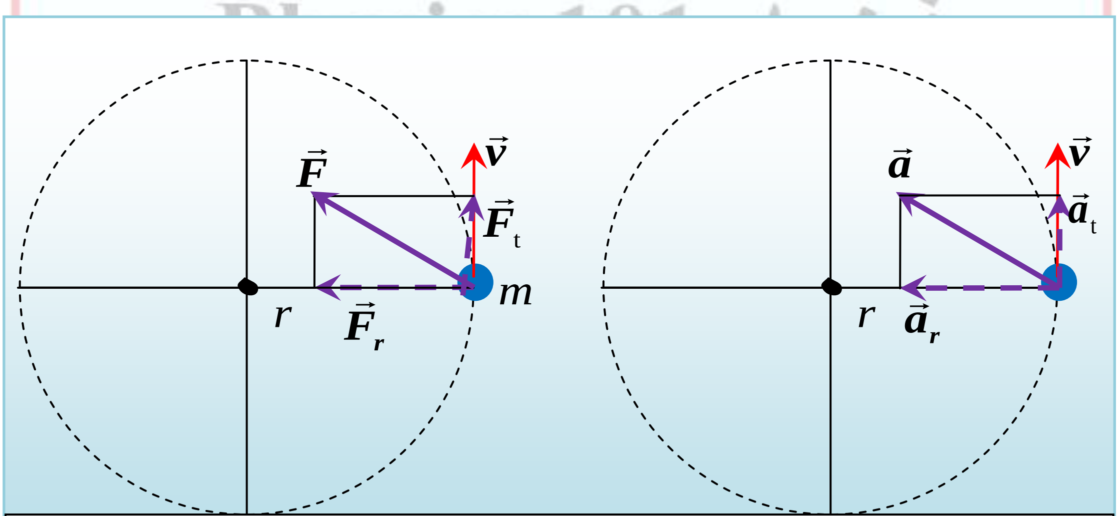
The Curved Road



هذه صورة عن واجهة البرمجية الثالثة. لاستعمال البرمجية الفعلية ما عليك فعله هو اختيار السرعة من خلال النقر على الزر Speed 1 أو Speed 2 ثم مراقبة الحركة والحسابات والتحقق منها. بإمكانك زيادة أو إنقاص زاوية ميلان الطريق المنحني بوضع الماوس على زر Increase Theta أو Decrease Theta حالما تظهران .

3-6: ديناميكا الحركة الدائرية الغير المنتظمة Dynamics of Nonuniform Circular Motion

عرفنا في البند الثاني أن الجسم يتحرك بمسار دائري بسرعة ثابتة عندما تكون محصلة القوى المؤثرة عليه تعمل باتجاه مركز المسار الدائري. إذا كانت محصلة القوى المؤثرة عليه لا تعمل باتجاه مركز المسار الدائري وإنما تميل بزاوية عن المركز كما في الشكل (6-5)، فإنه يصبح للقوة مركبتين. مركبة باتجاه مركز المسار الدائري $\vec{F}_r$ وهي التي تحافظ على أن يبقى الجسم يتحرك في المسار الدائري، أي إنها القوة المركزية وهي التي تسبب التسارع المركزي $\vec{a}_r$(نرمز له أحياناً $\vec{a}_\perp$). ومركبة مماسية للمسار الدائري $\vec{F}_t$ مسؤولة عن التسارع المماسي $\vec{a}_t$ (نرمز له أحياناً $\vec{a}_\parallel$). وحيث إن محصلة القوى المؤثرة على الجسم $\vec{F} = \vec{F}_r + \vec{F}_t$ كما في الشكل6-5a ، فإن التسارع الناتج عن القوى $\vec{a} = \vec{a}_r + \vec{a}_t$.



الشكل6-5:.

إن مقدار المركبة المماسية للتسارع a_t يساوي معدل تغير مقدار السرعة المتجهة للجسم بالنسبة للزمن $a_t = \dfrac{dv}{dt}$ واتجاه هذا التسارع يكون بموازاة اتجاه السرعة. بينما مقدار المركبة المركزية للتسارع a_r يساوي $a_r = \dfrac{v^2}{r}$ واتجاه هذا التسارع يكون نحو مركز المسار الدائري. وفي كل الأحوال فإن $\vec{a}_r$ و $\vec{a}_t$ دائماً متعامدين ولذلك يكون مقدار التسارع الكلي

$a = \sqrt{a_r + a_t}$. ولتوضيح كيف يمكن أن يكون لدينا تسارع مماسي ومركزي دعنا نأخذ المثال التالي:

Examples 6 A small sphere of mass $m = 0.1\text{kg}$ is attached to the end of 1.20m cord which rotates in a vertical circle about a fixed point o, as in Fig (6-6). (I) Find the tension at any point in the circle. (II) Find the minimum speed the sphere must have at the top of the circle path so that the sphere continues moving in the circle path.	**مثال 6** كرة صغيرة كتلتها $m = 0.1\text{kg}$ مربوطة بطرف حبل طوله 1.20m وتدور بمسار دائري عمودي على المستوى الأفقي مركزه نقطة ثابتة o كما في الشكل (6-6). (I) أوجد الشد في الحبل عند أي نقطة على المسار الدائري. (II) أوجد أقل سرعة للكرة يجب أن تمتلكها عند أعلى قمة المسار الدائري بحيث تستمر في مسارها الدائري.

(I) الحل: الحركة الدائرية هنا غير منتظمة بسبب الجاذبية. نصف القطر ثابت، لكن السرعة متغيرة بسبب التسارع المماسي $\vec{a}_t = \vec{g}\sin\theta$. عند النقطة a التسارع المماسي يساوي صفر لأن وزن الكرة لا يكون له مركبة باتجاه المماس. لكن مع حركة الكرة يصبح للوزن مركبة مماسية وبالتالي يصبح للكرة تسارع مماسي فيتغير مقدار السرعة تبعاً له. a b c $m\vec{g}\cos\theta$

وبما إن السرعة تتغير، فإن القوة المركزية تتغير أيضاً. وبإمكاننا استنتاج ذلك بوضوح حيث إن القوة المركزية هي محصلة قوة الشد ومركبة الوزن العمودية على المماس.

$$\vec{F}_r = \vec{F}_T - m\vec{g}\cos\theta = m\vec{a}_r$$

وتكون قوة الشد في الحبل

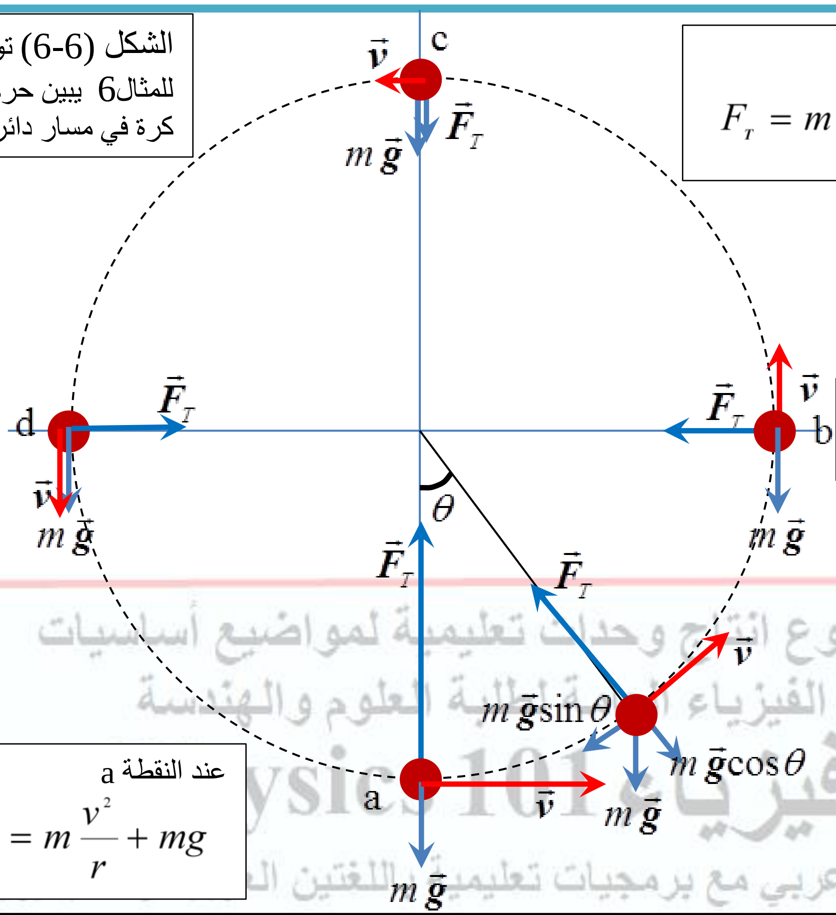
$$\vec{F}_T = m\vec{a}_r + m\vec{g}\cos\theta$$

ومقدارها

$$F_T = m\frac{v^2}{r} + m\,g\cos\theta$$

وبما السرعة متغيرة، وكذلك الزاوية، فإن قوة الشد تتغير في المقدار والاتجاه. لاحظ الرسومات في الشكل (6-6).

الشكل (6-6) توضيح للمثال6 يبين حركة كرة في مسار دائري



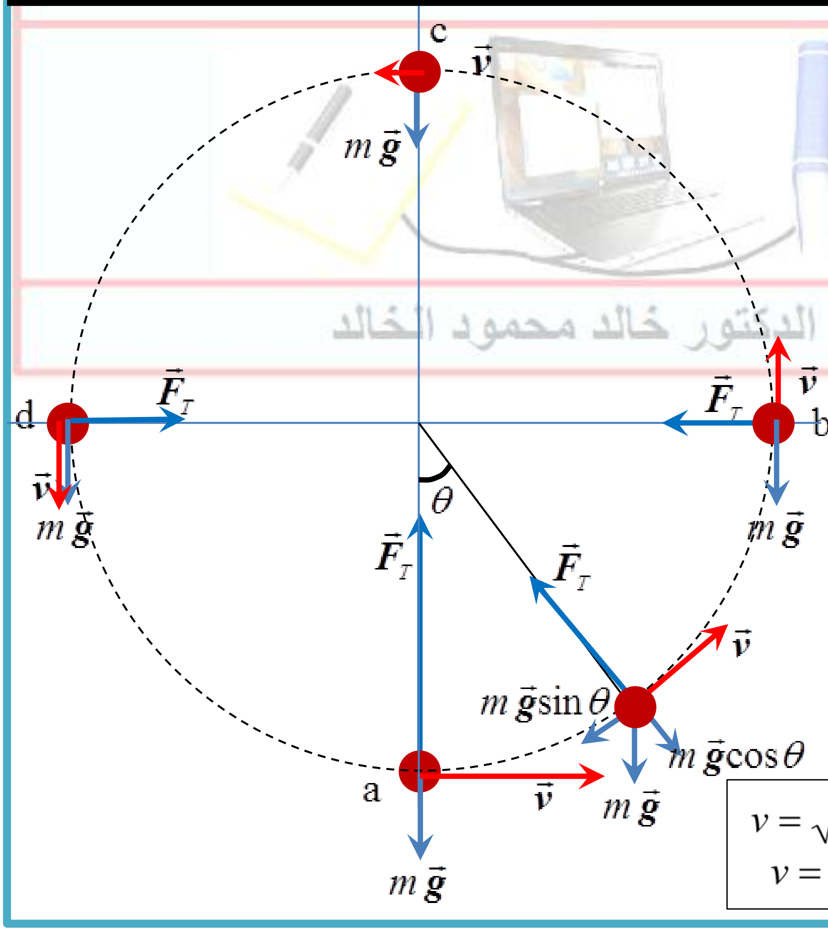
عند النقطة c

$$F_T = m\frac{v^2}{r} - mg$$

$$F_T = m\frac{v^2}{r}$$

عند النقطة a

$$F_T = m\frac{v^2}{r} + mg$$



(II) من معادلة الشد

عند النقطة c

$$F_T = m\frac{v^2}{r} - mg$$

نستطيع أن نستنتج أن أقل سرعة للكرة يجب أن تمتلكها بحيث تستمر في مسارها الدائري تكون عندما يكون الشد يساوي صفر.

$$v = \sqrt{r\,g}$$

$$v = \sqrt{(1.2\text{m})(9.8\text{m/s}^2)}$$

$$v = 3.43\,\text{m/s}$$

4-6: الحركة بوجود قوى معيقة معتمدة على السرعة

Motion In The Presence of Velocity-Dependent Resistive Forces

عندما يتحرك جسم على سطح صلب وخشن، فإن قوة الاحتكاك المؤثرة عليه تكون تقريباً ثابتة وغير معتمدة على سرعته. لكن عندما يسير الجسم وسط مائع ما مثل الهواء أو الماء أو أي سائل آخر فإن الجسم يعاني من قوة مقاومة لحركته تسمى أحياناً القوة المعيقة للحركة **Drag Force** $\left(\vec{F}_{\mathrm{D}}\right)$، وهذه القوة تزداد بازدياد سرعته وتقل بنقصان سرعته، أي إن مقدارها يعتمد على سرعة الجسم بينما اتجاهها يكون دائماً باتجاه معاكس لاتجاه السرعة. إن اعتماد القوة المعيقة على السرعة فيه شيء من التعقيد ويعتمد على عدة متغيرات مثل لزوجة المائع وحجم الجسم وشكله، لكن بشيء من التقريب نستطيع أن نقول أنه في الحالات التي يكون فيها الجسم صغير ويتحرك بسرعة صغيرة جداً فإن مقدار القوة المعيقة تقريباً يتناسب تناسباً طردياً مع مقدار السرعة

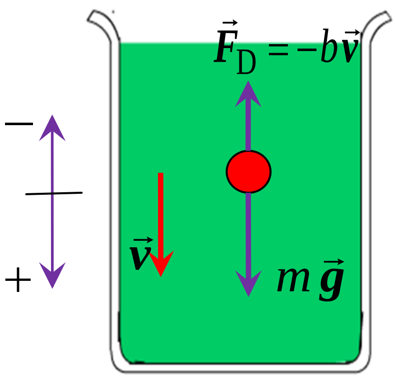
$$\vec{F}_{\mathrm{D}} = -b\vec{v} \quad \text{و} \quad F_{\mathrm{D}} = bv \quad \text{.........................} \quad (6\text{-}6)$$

حيث b ثابت يعتمد على لزوجة المائع وحجم الجسم وشكله

أما في الحالات التي يتحرك فيها الجسم بسرعة كبيرة مثل حركة الطائرات والأجسام الساقطة في الهواء وحركة السيارات على الطرق السريعة فإن مقدار القوة المعيقة تقريباً يتناسب تناسباً طردياً مع مربع مقدار السرعة

$$F_{\mathrm{D}} = bv^2 \quad \text{.........................} \quad (6\text{-}7)$$

دعنا ندرس حركة كرة كتلتها m تسقط سقوطاً حراً من السكون في مائع بإهمال قوة الطفو (قوة أرخميدس). كما في الشكل (6-7)، أي إن القوى المؤثرة على الكرة هي وزن الكرة $m\vec{g}$ بالاتجاه الأسفل والقوة المعيقة المعتمدة على مقدار السرعة $b\vec{v}$ بالاتجاه الأعلى. وبما إن سرعة الكرة تتجه نحو الأسفل، فدعنا نأخذ الاتجاه الأسفل هو الاتجاه الموجب، وبناءً عليه نكتب محصلة القوى المؤثرة على الكرة بالاتجاه العمودي.



الشكل (6-7) حركة كرة في وعاء يحتوي مادة لزجة.

$$\sum \vec{F} = m\vec{g} - b\vec{v} \qquad \text{........................} \quad (6\text{-}8)$$

بتطبيق قانون نيوتن الثاني للحركة العمودية للكرة

$$m\vec{g} - b\vec{v} = m\frac{d\vec{v}}{dt} \qquad \text{........................} \quad (6\text{-}9)$$

وبما إن الحركة بخط مستقيم فإننا نستطيع كتابة المعادلة (6-9) على الصورة

$$mg - bv = m\frac{dv}{dt} \qquad \text{........................} \quad (6\text{-}10)$$

المعادلة (6-10) تسمى معادلة تفاضلية والطالب غير مُعد حالياً لحل مثل هذه المعادلات. ولكن بشيء من التبسيط نستطيع أن نقول أنه في البداية تكون السرعة تساوي صفر وبالتالي تكون القوة المعيقة تساوي صفر ويكون تسارع الكرة الابتدائي هو تسارع السقوط الحر

عند اللحظة $t = 0$ تكون $v = 0$ والتسارع الابتدائي $g = \frac{dv}{dt}$.

مع ازدياد سرعة الكرة تزداد القوة المعيقة وبالتالي يقل تسارع الكرة ومع استمرار ازدياد سرعة الكرة فإن الكرة تصل إلى سرعة تكون عندها القوة المعيقة المؤثرة عليها bv تساوي قوة الجاذبية mg، وهذه السرعة تسمى السرعة الحدية v_t terminal velocity، وعند تلك اللحظة فإن المعادلة (6-10) تصبح $mg - bv_t = 0$ ومنها نستطيع أن نحسب السرعة الحدية

$$v_t = \frac{mg}{b} \qquad \text{........................} \quad (6\text{-}11)$$

وللحصول على حل شامل يتمثل في إيجاد السرعة بدلالة الزمن عند أي لحظة، نطبق حساب التفاضل والتكامل على المعادلة (6-10) مع إجراء بعض الترتيبات

$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{bv}{m} = -\frac{b}{m}\left(v - g\frac{m}{b}\right)$$

ومنها

$$\frac{dv}{\left(v - g\dfrac{m}{b}\right)} = -\frac{b}{m}dt$$

وبإجراء عملية التكامل لطرفي المعادلة مع الأخذ بالشرط الابتدائي وهو $v = 0$ عند $t = 0$

$$\int_0^v \frac{dv}{\left(v - g\frac{m}{b}\right)} = -\frac{b}{m}\int_0^t dt$$

$$\ln\left(v - g\frac{m}{b}\right)\Bigg|_0^v = -\frac{b}{m}t\Bigg|_0^t$$

ومنها

$$\ln\left(v - g\frac{m}{b}\right) - \ln\left(-g\frac{m}{b}\right) = -\frac{b}{m}t$$

أو

$$\ln\left[\frac{\left(v - g\frac{m}{b}\right)}{-g\frac{m}{b}}\right] = -\frac{b}{m}t$$

أو

$$\frac{\left(v - g\frac{m}{b}\right)}{-g\frac{m}{b}} = e^{-\frac{b}{m}t}$$

ومنها نحصل على السرعة

$$v = g\frac{m}{b} - g\frac{m}{b}e^{-\frac{b}{m}t}$$

وبإجراء بعض الترتيبات نحصل على الشكل التالي للمعادلة

$$v = \frac{mg}{b}\left(1 - e^{-\frac{b}{m}t}\right) = v_t\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \qquad \text{............ (6-11)}$$

حيث $\tau = \dfrac{m}{b}$ الزمن اللازم لكي تصل الكرة إلى 63% من سرعتها الحدية، ويطلق عليه ثابت الزمن.

Examples 7 A small sphere of mass $m = 5\text{g}$ is released from rest in a large vessel filled viscous liquid (glycerin oil) reaches to terminal velocity of $v_t = 0.163\text{m/s}$. (I) Find the constant b. (II) Find the time constant τ .	**مثال 7** كرة صغيرة كتلتها $m = 5\text{g}$ أسقطت من السكون في وعاء طويل مملوء بسائل لزج (مثل زيت الجليسرين) ووصلت إلى سرعتها الحدية حيث كانت $v_t = 0.163\text{m/s}$. (I) اوجد قيمة الثابتة b. (II) أوجد قيمة ثابت الزمن τ .

الحل: (I) من معادلة السرعة الحدية $v_t = \dfrac{mg}{b}$ نحصل على

$$b = \frac{mg}{v_t} = \frac{(5g)\times(980\text{cm/s}^2)}{16.3\text{cm/s}} = 300\, g/s$$

(II) ثابت الزمن

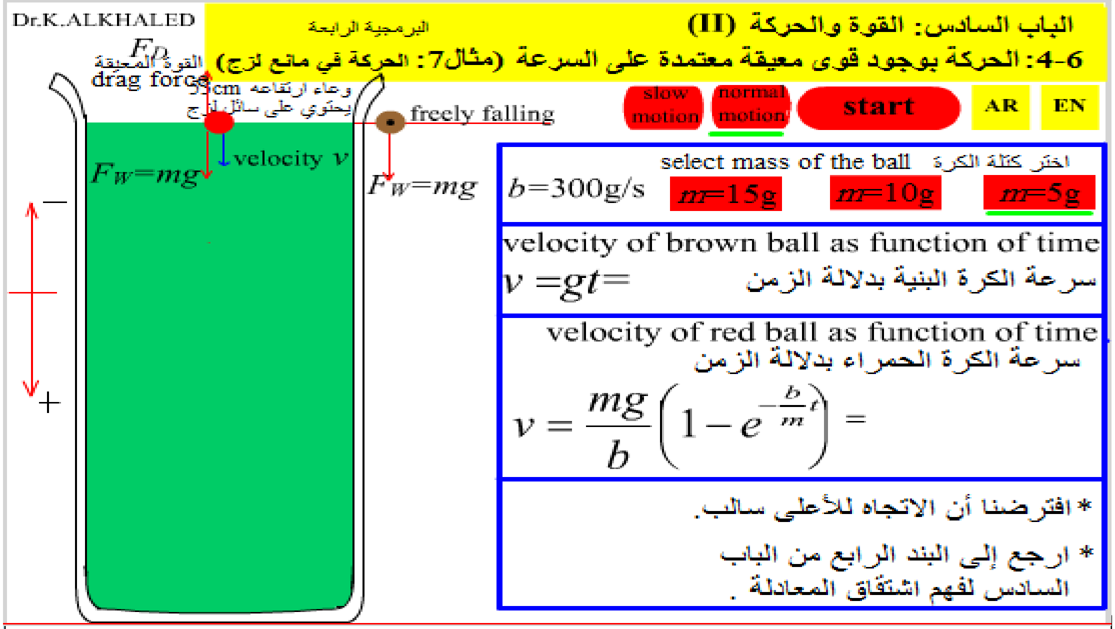
$$\tau = \frac{m}{b} = \frac{5g}{300\, g/s} = 16\times10^{-3}\, s = 16\, ms$$

ولمزيد من التوضيح حول هذا الموضوع، ندعوك عزيزي الطالب للرجوع إلى البرمجية الرابعة

. البرمجية الرابعة بعنوان: الحركة في مائع لزج . Motion in Viscous Fluid

صورة عن واجهة البرمجية الثالثة للباب السادس وهي بعنوان **الحركة في مائع لزج .**

Motion in Viscous Fluid



هذه صورة عن واجهة البرمجية الثالثة. لاستعمال البرمجية الفعلية ما عليك فعله هو 1 - اختيار نوع الحركة.
2 - اختيار قيمة كتلة الكرة . 3 - بدء الحركة. من خلال النقر على الزر **start** .

.

وفي ختام ما تم تقديمه في هذه الوحدة الدراسية، ندعوك عزيزي الطالب للمشاركة من خلال تزويدنا بالأسئلة والملاحظات لكي يصبح هذا المشروع ملبياً لحاجاتك التعليمية. أن النشر الالكتروني يتيح لنا التعديل في أي وقت، فلا تبخل علينا بملاحظاتك.