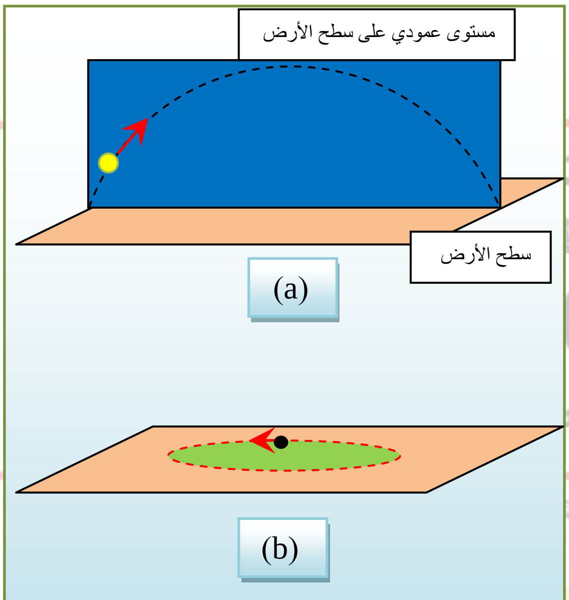
4 الباب الرابع Chapter Four

الحركة في بعدين Motion in Two Dimensions

4-1: مقدمة Introduction

يُطلق مفهوم الحركة في بعدين على الحركة الحاصلة في مستوى (plane). وتعد حركة المقذوفات بالقرب من سطح الأرض والحركة في مسار منحني مثالين على هذه الحركة، شكل 4-1. وتشكل هذه الحركة تعميم أشمل للحركة في بعد واحد حيث يمكن اعتبار حركة جسم في بعدين على أنها حركة في خط مستقيم **متزامنة** مع حركته على خط مستقيم آخر. الخطين المستقيمين في المستوى الكارتيزي xy هما المحورين x و y.



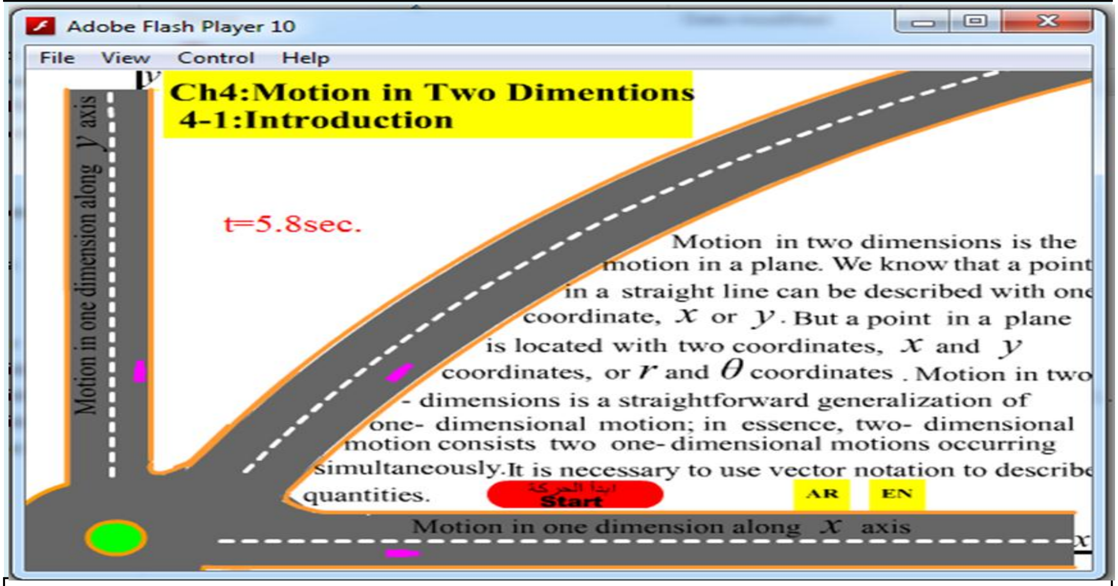
شكل 4-1 مثالين على الحركة في بعدين. (a) حركة جسيم مقذوف في الفضاء بالقرب من سطح الأرض. (b) حركة جسيم يتحرك على مسار دائري في مستوى موازي لسطح الأرض.

لقد استخدمنا في الباب الثاني الكميات المتجهة الإزاحة displacement ، السرعة المتجهة velocity، والتسارع acceleration لوصف حركة الجسم في بعد واحد. سوف نستخدم في هذا الباب نفس هذه الكميات المتجهة لوصف حركة الجسم في بعدين، ولكن هنا سيكون لكل كمية متجهة جزئين (مركبتين)، جزء (مركبة) في اتجاه محور x والجزء الثاني في اتجاه محور y.

ولمزيدٍ من التوضيح ندعوك عزيزي الطالب للرجوع إلى البرمجية الأولى لهذا الباب.

البرمجية الأولى بعنوان: المقدمةا Introduction .

صورة عن واجهة البرمجية الأولى للباب الرابع وهي بعنوان المقدمة **Introduction**



هذه صورة عن واجهة البرمجية الأولى. لاستعمال البرمجية الفعلية ما عليك فعله هو النقر على زر ابدأ الحركة ثم مراقبة الحركة والنظر فيها لإدراك مفهوم الحركة في بعدين . لقراءة النص في اللغة الانجليزية أنقر عل زر EN .

2-4: متجه الموقع والإزاحة Position Vector and Displacement

تعلمنا في الباب الثاني أن معرفة موقع جسم ما بدلالة الزمن تفيدنا في معرفة تفاصيل حركته على الخط المستقيم. في هذا الباب سنعمم الفكرة على خطين بالتزامن. إن أول كمية متجهة تلزمنا لوصف الحركة هي الإزاحة، وبما أن الإزاحة هي التغير في الموقع، فإننا مضطرين لتعيين متجه الموقع للجسم المتحرك في المستوى xy.

عندما يكون جسم ما في مستوى عند نقطة مثل p_1 التي إحداثياتها (x_1,y_1) فإن موقع الجسم يُحَدد بمتجه الموقع $\vec{r}_1$ شكل 4-2

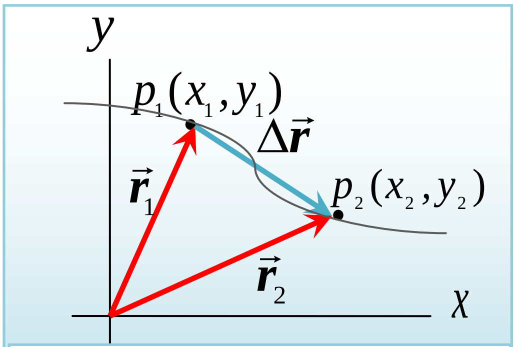
$$\vec{r}_1 = x_1\,\hat{i} + y_1\,\hat{j} \qquad ....(4\text{-}2)$$

إذا تحرك الجسم من النقطة p_1 ابتداءً من الزمن t_1 ووصل عند الزمن t_2 إلى النقطة p_2 التي إحداثياتها (x_2,y_2) ، يُصبح متجه موقعه عندها $\vec{r}_2$

$$\vec{r}_2 = x_2\,\hat{i} + y_2\,\hat{j} \qquad ....(4\text{-}2)$$

إن الحركة من الموقع الأول إلى الموقع الثاني تكافئ حركتين متعامدتين متزامنتين: الأولى من الموقع x_1 إلى الموقع x_2، والثانية **متزامنة** مع الحركة الأولى من الموقع y_1 إلى الموقع y_2.

إن الإزاحة الحاصلة للجسم خلال الفترة الزمنية $\Delta t = t_2 - t_1$ نتيجة تغير موقعه تكون:



شكل 4-2 جسيم يتحرك على مسار في المستوى xy من النقطة p_1 إلى النقطة p_2

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = \left(x_2\,\hat{i} + y_2\,\hat{j}\right) - \left(x_1\,\hat{i} + y_1\,\hat{j}\right) \qquad ....(4\text{-}3)$$

$$= (x_2 - x_1)\,\hat{i} + (y_2 - y_1)\,\hat{j} \qquad ....(4\text{-}4)$$

أي إن متجه الإزاحة يتكون من جزئين (مركبتين): الجزء الأول إزاحة على المحور x والجزء الثاني إزاحة على المحور y

$$\Delta\vec{r} = \Delta x\,\hat{i} + \Delta y\,\hat{j} \qquad ....(4\text{-}5)$$

ويكون مقدار متجه الإزاحة

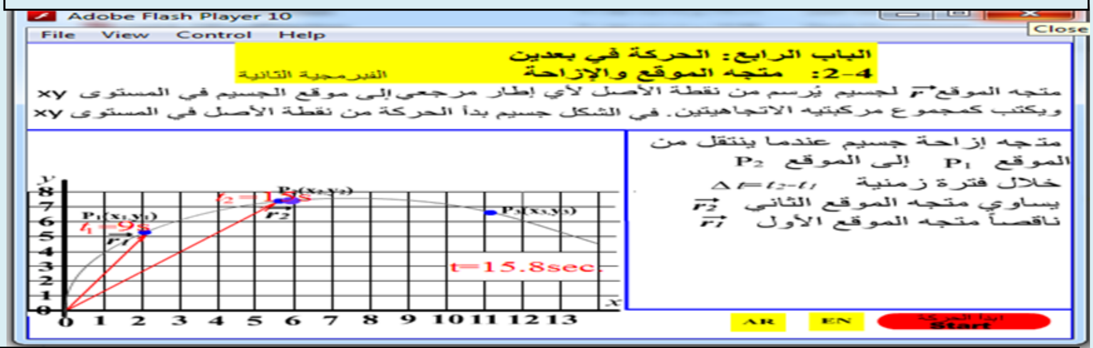
$$\left|\Delta\vec{r}\right| = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \qquad ....(4\text{-}6)$$

وكما هو مُلاحظ من الشكل 4-2 فإن مقدار الإزاحة يكون أقل أو يساوي المسافة المقطوعة.

ولمزيدٍ من التوضيح ندعوك عزيزي الطالب للرجوع إلى البرمجية الثانية لهذا الباب.

البرمجية الثانية بعنوان: متجه الموقع والازاحة Position vector and displacement .

صورة عن واجهة البرمجية الثانية للباب الرابع وهى بعنوان متجه الموقع والازاحة



هذه صورة عن واجهة البرمجية الثانية . لاستعمال البرمجية الفعلية ما عليك فعله هو النقر على زر ابدأ الحركة ثم مراقبة الحركة والنظر فيها لإدراك مفهوم متجه الموقع ومتجه الازاحة . لقراءة النص فى اللغة الانجليزية أنقر عل زر EN .

Examples 1 the position vector of a particle as a function of time is given by

$$\vec{r} = [(4.0\text{m/s})\,t + (2.0\text{m/s}^2)\,t^2]\hat{i} + [(8.0\text{m}) - (1.0\text{m/s}^3)\,t^3]\hat{j} \text{ m/s.}$$

where r is in meters and t is in second.(I) Determine the particle displacement between t=1 s and t=3 s.

مثال1 أعطي متجه الموقع لجسيم بدلالة الزمن حسب العلاقة، حيث r بوحدة المتر و t بوحدة الثانية . (I) أوجد إزاحة الجسيم بين الزمنين t=1 s و t=3 s .

عند الزمن t=1 s يكون متجه الموقع للجسيم

$$\vec{r}_{t=1s} = [(4.0\text{m}) + (2.0\text{m})]\hat{i} + [(8.0\text{m}) - (1.0\text{m})]\hat{j} = 6\hat{i} + 7\hat{j}$$

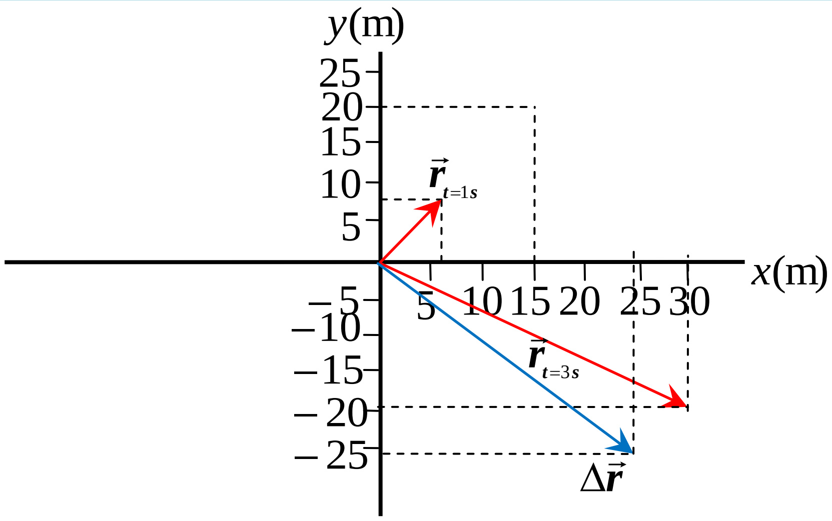
وعند الزمن t=3 s يكون متجه الموقع للجسيم

$$\vec{r}_{t=3s} = [(12.0\text{m}) + (18.0\text{m})]\hat{i} + [(8.0\text{m}) - (27.0\text{m})]\hat{j} = 30\hat{i} - 19\hat{j}$$

إزاحة الجسيم بين الزمنين t=1 s و t=3 s هي

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_{t=3s} - \vec{r}_{t=1s}$$

$$\Delta\vec{r} = [(30.0\text{m}) - (6.0\text{m})]\hat{i} + [(\text{-}19.0\text{m}) - (7.0\text{m})]\hat{j} = 24\hat{i} - 26\hat{j}$$



الشكل(3-4) متجه موقع الجسيم عند الزمن t=1 s وعند الزمن t=3 s باللون الأحمر . ومتجه الإزاحة الحاصل للجسيم بين الزمنين المذكورين باللون الأزرق.

3-4: السرعة المتجهة velocity

لا يختلف تعريف السرعة المتجهة velocity في بعدين عن تعريفها في بعد واحد. فهي مفهوم فيزيائي يشير إلى علاقة الإزاحة الحاصلة لجسم ما والفاصل الزمني الذي حصلت فيه الإزاحة. هناك مفهومان كما عرفنا في الباب الثاني يندرجان تحت مفهوم السرعة المتجه هما، متوسط السرعة المتجهة $\bar{\vec{v}}$ average velocity ، والسرعة المتجهة اللحظية $\vec{v}$ instantaneous velocity. في بعدين، إذا كانت الإزاحة الحاصلة لجسم ما خلال فترة زمنية Δt هي $\Delta\vec{r}$ فإن متوسط السرعة المتجهة $\bar{\vec{v}}$ تساوي نسبة الإزاحة الحاصلة خلال تلك الفترة الزمنية إلى الفترة الزمنية:

$$\bar{\vec{v}} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} \qquad \text{..................(4-7)}$$

ويكون اتجاهها على طول اتجاه $\Delta\vec{r}$. أو يمكن صياغتها اعتماداً على خواص المتجهات بضرب المتجه $\Delta\vec{r}$ بالعدد $\frac{1}{\Delta t}$ فتكون النتيجة المتجه $\bar{\vec{v}}$ واتجاهها هو نفسه اتجاه $\Delta\vec{r}$. وكما هو مُلاحظ من الشكل 4-2 فإن متوسط السرعة المتجهة بين نقطتين لا يعتمد على المسار بين النقطتين، ويعود ذلك بسبب أن متوسط السرعة المتجهة يعتمد على إزاحة الجسم من النقطة الأولى إلى النقطة الثانية وليس على المسافة المقطوعة. عندما ينتقل جسم ما من نقطة معينة إلى نقطة أخرى ثم يعود راجعاً إلى نفس القطة الأولى فأن متوسط السرعة المتجهة يساوي صفر لأن الإزاحة تكون في هذه الحالة تساوي صفر.بينما متوسط السرعة القياسية average speed لا يساوي صفر وإنما يساوي المسافة المقطوعة مقسومة على الفترة الزمنية المستغرقة في قطع المسافة.

لقد عرفنا في الباب الثاني أن الفرق بين متوسط السرعة المتجهة والسرعة اللحظية المتجهة instantaneous velocity يكمن في الفاصل الزمني الذي حصلت خلاله الإزاحة، فإذا كان الفاصل الزمني الذي حصلت خلاله الإزاحة صغير جداً ويقترب من الصفر فإن متوسط السرعة المتجهة خلال هذا الزمن الصغير جداً تسمى السرعة اللحظية المتجهة :

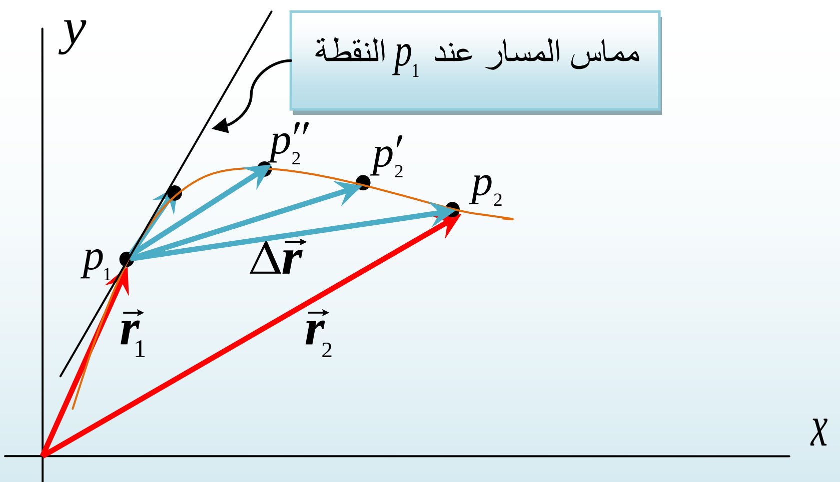
لتوضيح ذلك من خلال الرسم البياني، افترض أن جسيماً يسير على مسار معين في المستوى xy وكان في لحظة زمنية t_1 عند النقطة P_1، وتم وصف موقعه على أنه $\vec{r}_1$. وبعد انقضاء فاصل زمني Δt أصبح الجسيم في اللحظة الزمنية t_2 عند النقطة P_2، وتم وصف موقعه على أنه $\vec{r}_2$ الشكل3-4. إن الإزاحة التي حصلت للجسيم خلال الفاصل الزمني

$\Delta t = t_2 - t_1$ هي $\Delta \vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ بغض النظر عن المسار الذي سلكه الجسيم، لاحظ من الشكل 3-4. أن مقدار الإزاحة أقل من طول المسار بين النقطتين P_1 و P_2. أن متوسط السرعة المتجه خلال هذا الفاصل الزمن،

$$average\ velocity \quad \bar{v} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{t_2 - t_1} \qquad ....(4\text{-}8)$$

إذا قمنا بحساب الإزاحة خلال فترات زمنية مختلفة مقاديرها تتغير تنازلياً إلى أن نصل إلى فترة زمنية تقترب من الصفر فإننا سنحصل على إزاحات تتناقص أصغر فأصغر إلى أن تصبح الإزاحة $\Delta \vec{r}$ مماساً للمسار عند النقطة P_1، وعندها تصبح متوسط السرعة المتجه هي السرعة اللحظية، ومقدار السرعة اللحظية عند النقطة P_1 يكون ميل مماس المسار عند تلك النقطة، ورياضياً

$$instantaneous\ velocity \quad \vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\,\vec{r}}{d\,t} \qquad ....(4\text{-}9)$$



شكل 3-4 جسيم يتحرك على مسار في المستوى xy بين نقطتين ابتداءً من النقطة p_1 خلال فترات زمنية مختلفة. اتجاه متوسط السرعة يكون باتجاه الإزاحة $\Delta \vec{r}$. إذا أخذنا الحركة خلال فترات زمنية تصغر تدريجياً فأننا نصل إلى أن اتجاه الإزاحة يكون على طول المماس للمسار، وبالتالي فإن اتجاه السرعة يكون مماساً للمسار.

وفي هذه الحالة، فإن مقدار الإزاحة لا يختلف عن المسافة المقطوعة، وبالتالي فإن مقدار متجه السرعة اللحظية يساوي السرعة القياسية اللحظية

instantaneous speed = instantaneous velocity

نلاحظ من المعادلة أن السرعة اللحظية تساوي مشتقة متجه الموقع بالنسبة. ونلاحظ من الشكل أن اتجاه السرعة اللحظية عند نقطة معينة يكون مماساً للمسار عند تلك النقطة باتجاه الإزاحة $\Delta\vec{r}$.

عرفنا في بند متجه الموقع والإزاحة أن متجه الموقع نستطيع كتابته بدلالة جزئي (مركبتي) متجه الموقع

$$\vec{r} = x\,\hat{i} + y\,\hat{j} \qquad ....(4\text{-}9)$$

بأخذ المشتقة الأولى لمتجه الموقع مع مراعاة أن متجهي الوحدة $\hat{i}$ و $\hat{j}$ ثابتان في المقدار والاتجاه وبالتالي فإن مشتقة كل منهما تساوي صفر، فتكون نتيجة المشتقة الأولى

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\hat{i} + \frac{dy}{dt}\hat{j} = v_x\hat{i} + v_y\hat{j} \qquad ....(4\text{-}10)$$

ويكون مقدار متجه السرعة اللحظية $|\vec{v}|$ يساوي

$$|\vec{v}| = v = \sqrt{v_x^{\,2} + v_y^{\,2}} \qquad ....(4\text{-}11)$$

تذكر أن

$$\vec{v}_x = \frac{d\vec{x}}{dt}, \vec{v}_y = \frac{d\vec{y}}{dt} \quad \textit{vevtor components of velocity vector}$$

$$v_x = \frac{dx}{dt} \quad , \quad v_y = \frac{dy}{dt} \quad \textit{components of velocity vector}$$

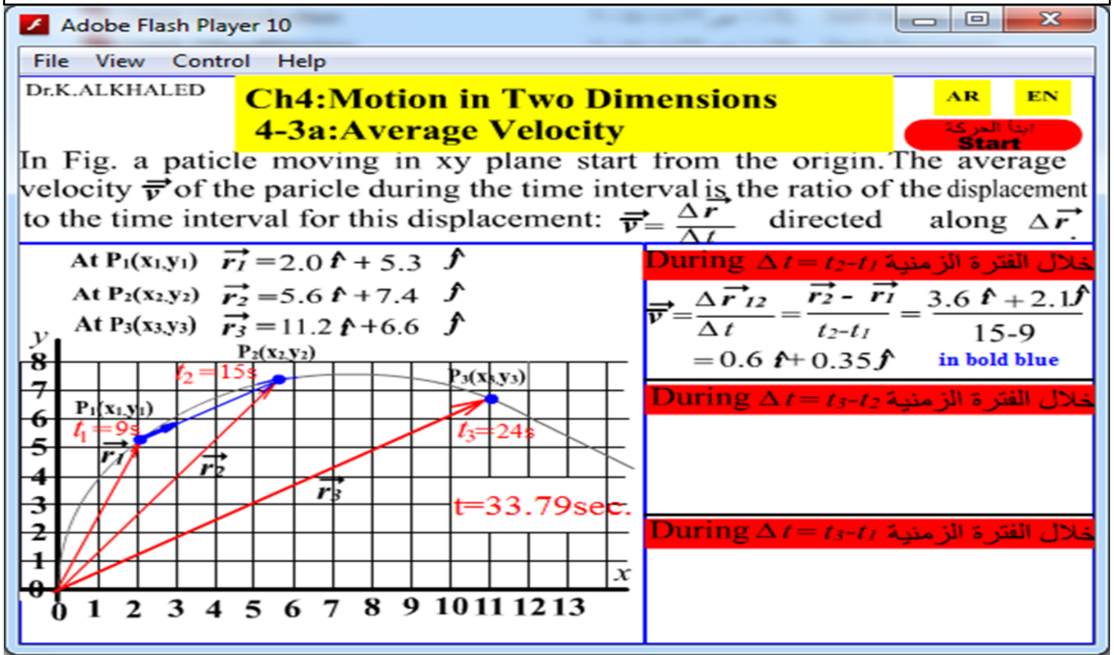
إن السرعة اللحظية المتجه نهتم بها أكثر من متوسط السرعة المتجهة، ولذلك من الآن فصاعداً سنستعمل كلمة السرعة المتجهة ورمزها $\vec{v}$ للإشارة إلى السرعة اللحظية المتجه، ويعود إلى المتكلم استعمال كلمة السرعة فقط مع الاحتفاظ بأن ما يقصده هو سرعة متجهة لها مقدار واتجاه.

ولمزيدٍ من التوضيح ندعو الطالب للرجوع إلى البرمجية الثالثة والبرمجية الرابعة لهذا الباب.

البرمجية الثالثة بعنوان: متوسط السرعة المتجهة Average Velocity .

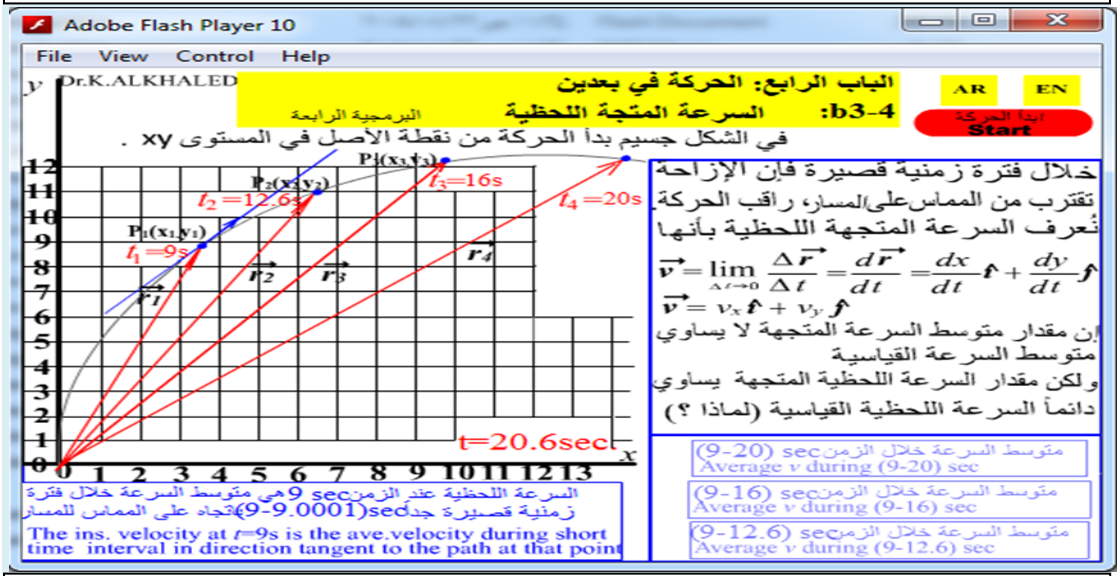
البرمجية الرابعة بعنوان: السرعة المتجهة اللحظية Instantaneous Velocity.

صورة عن واجهة البرمجية الثالثة للباب الرابع وهي بعنوان متوسط السرعة المتجهة . Average Velocity



هذه صورة عن واجهة البرمجية الثالثة. لاستعمال البرمجية الفعلية ما عليك فعله هو النقر على زر ابدأ الحركة ثم مراقبة الحركة والنظر فيها لإدراك مفهوم متوسط السرعة المتجهة . لقراءة النص في اللغة العربية أنقر على زر **AR** .

صورة عن واجهة البرمجية الرابعة للباب الرابع وهي بعنوان السرعة المتجهة اللحظية .Instantaneous Velocity



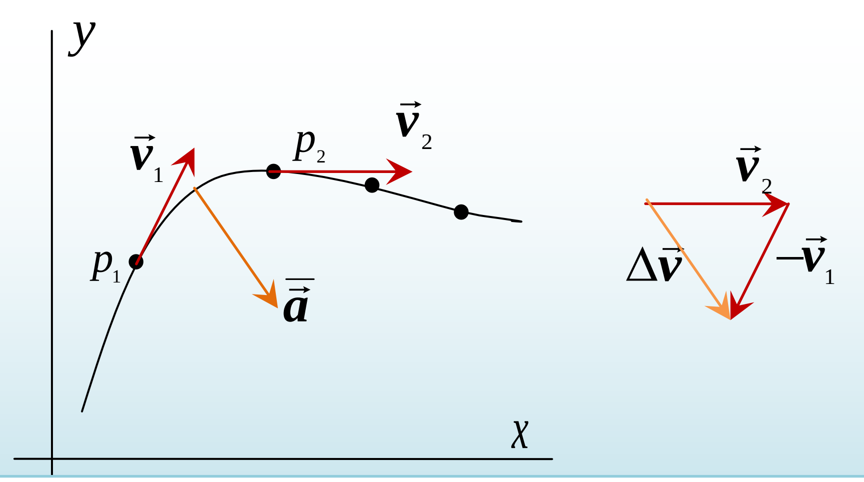
هذه صورة عن واجهة البرمجية الرابعة . لاستعمال البرمجية الفعلية ما عليك فعله هو النقر على زر ابدأ الحركة ثم مراقبة الحركة والنظر فيها لإدراك مفهوم السرعة المتجهة اللحظية . لقراءة النص في اللغة الانجليزية أنقر على زر **EN** .

4-4: التسارع Acceleration

عندما تتغير السرعة المتجهة لجسم ما مع الزمن نقول إن الجسيم يتسارع، فالتسارع مفهوم فيزيائي يصف تغير السرعة المتجهة مع الزمن، وهو كمية متجهة اتجاهه باتجاه $\Delta\vec{v}$. عندما تكون حركة الجسيم في خط مستقيم، يكون للتسارع جزء واحد (مركبة واحدة). بينما عندما تكون الحركة في بعدين فإن السرعة قد تتغير مقداراً واتجاهاً. وكما عرفنا في الباب الثاني يندرج تحت مفهوم التسارع مفهومان هما، متوسط التسارع $\bar{\vec{a}}$ average acceleration ، والتسارع اللحظي $\vec{a}$ instantaneous acceleration.

في الشكل (4-4) جسيم يسير في مسار معين في المستوى xy وكان في لحظة زمنية t_1 عند النقطة P_1 ، وتم وصف سرعته على أنها $\vec{v}_1$. وبعد انقضاء فاصل زمني Δt أصبح الجسيم في اللحظة الزمنية t_2 عند النقطة P_2 ، وتم وصف سرعته على أنها $\vec{v}_2$. إن التغير في السرعة خلال الفاصل الزمني $\Delta t = t_2 - t_1$ هي $\Delta\vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$ ، وبالتالي يكون متوسط التسارع خلال هذا الفاصل الزمني هو نسبة $\Delta\vec{v}$ إلى Δt ، أي إن الناتج متجه اتجاهه باتجاه $\Delta\vec{v}$.

$$\textit{average acceleration} \quad \bar{\vec{a}} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{t_2 - t_1} \qquad \text{..........(4-12)}$$



شكل (4-4) جسيم يتحرك على مسار في المستوى xy سرعته عند النقطة p_1 هي $\vec{v}_1$، وسرعته عند النقطة p_2 هي $\vec{v}_2$. متوسط التسارع بين النقطتين يكون $\bar{\vec{a}}$، واتجاهه يكون باتجاه $\Delta\vec{v}$ ومكان تأثيره يكون عند منتصف المسار بين النقطتين. $\Delta\vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$

إذا كان الفاصل الزمني الذي حصل خلاله التغير في السرعة صغير جداً يقترب من الصفر، فإن متوسط التسارع في هذه الحالة يكون التسارع اللحظي

$$\textbf{\textit{instantaneous acceleration}} \qquad \vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\,\vec{v}}{d\,t} \qquad ....(4\text{-}13)$$

وهو تساوي المشتقة الأولى للسرعة المتجهة اللحظية بالنسبة للزمن.

نحن عادة نهتم بالتسارع اللحظي أكثر من اهتمامنا بمتوسط التسارع، ولذلك نستعمل كلمة التسارع للدلالة على التسارع اللحظي $\vec{a}$.

من المعادلة نستطيع كتابة التسارع $\vec{a}$ باستعمال جزئيه (مركبتيه)

$$\vec{a} = \frac{d\,\vec{v}}{d\,t} = \frac{d\,v_x}{d\,t}\,\hat{i} + \frac{d\,v_y}{d\,t}\,\hat{j} = a_x\,\hat{i} + a_y\,\hat{j} \qquad ....(4\text{-}14)$$

وأيضاً، لأن كل جزء (مركبة) سرعة هو في الأصل المشتقة الأولى لمتجه الموقع، فإننا نستطيع كتابة التسارع على الصورة:

$$\vec{a} = \frac{d\,\vec{v}}{d\,t} = \frac{d^2\,\vec{r}}{d\,t^2} = \frac{d^2\,x}{d\,t^2}\,\hat{i} + \frac{d^2\,y}{d\,t^2}\,\hat{j} \qquad ....(4\text{-}15)$$

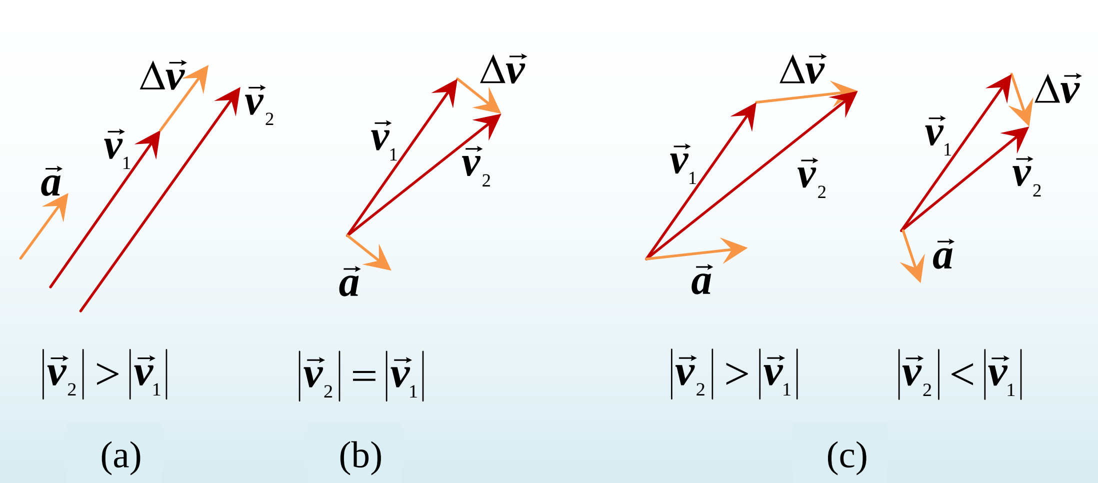
حيث

$$a_x = \frac{d\,v_x}{d\,t} = \frac{d^2\,x}{d\,t^2} \quad ، \quad a_y = \frac{d\,v_y}{d\,t} = \frac{d^2\,y}{d\,t^2} \qquad ....(4\text{-}16)$$

من دراستنا للباب الثاني وهذا الباب نَخلص إلى أن الجسيم يكتسب تسارعاً تبعاً للأسباب التالية شكل (4-5).

- أولاً: إذا تغير مقدار السرعة المتجهة اللحظية مع الزمن مع بقاء اتجاهها ثابت، أي إذا تغيرت فقط السرعة القياسية speed مع الزمن كما هو الحال في الحركة في خط مستقيم. ويكون التسارع ثابتاً إذا كان معدل تغير السرعة بالنسبة للزمن ثابتاً شكل (4-5-a) .

- ثانياً: إذا تغير اتجاه السرعة المتجهة اللحظية مع الزمن وبقي مقدارها ثابتاً كما هو الحال في الحركة بسرعة ثابتة مقداراً على مسار منحني (curved path). ويكون التسارع عمودياً على اتجاه السرعة شكل (b-5-4).
- ثالثاً: إذا تغيرت السرعة المتجهة اللحظية مقداراً واتجاها شكل (c-5-4). ويحصل ذلك إذا كان الجسيم يسير بسرعة متغير زيادة أو نقصاناً على مسار منحني.



شكل (4- 5) الحالات التي يكتسب فيها أي جسم تسارعاً. (a) الحالة التي تتغير فيها السرعة مقداراً دون تغير في الاتجاه، وهي الحركة في خط مستقيم. (b) الحالة التي يتغير فيها اتجاه السرعة دون تغير في المقدار، وهي الحركة الدائرية التي يكون فيها المسار ثابت التحدب. (c) الحالة التي تتغير فيها السرعة مقداراً واتجاهاً، وهي الحركة في مسارات متغيرة التحدب.

شكل (4- 6) يوضح ما جاء في الشكلين (4-5-b) و(4-5-c). وهو يمثل ثلاث حالات لجسيم يسير على مسار منحني: في الحالة الأولى السرعة ثابتة، وفي الحالة الثانية السرعة متزايدة، وفي الحالة الثالثة السرعة متناقصة. إذا كانت السرعة متغيرة في الاتجاه وثابتة في المقدار كما هو في الحالة الأولى، فإن اتجاه التسارع يكون دائماً نحو تقعر المسار عمودياً على اتجاه السرعة وفي هذه الحالة تكون الحركة دائرية شكل (4-6-a).

إذا كانت السرعة متغيرة في الاتجاه ومتغيرة في المقدار بشكل متزايد كما هو في الحالة الثانية، فإن التسارع يكون له جزئين (مركبتين): تسارع موازي $\vec{a}_{\parallel}$ parallel component اتجاهه باتجاه السرعة، وتسارع عمودي $\vec{a}_{\perp}$ vertical component اتجاهه عمودي على اتجاه السرعة وتكون النتيجة التسارع

$$\vec{a} = \vec{a}_{\parallel} + \vec{a}_{\perp} \qquad \text{..........(4-17)}$$

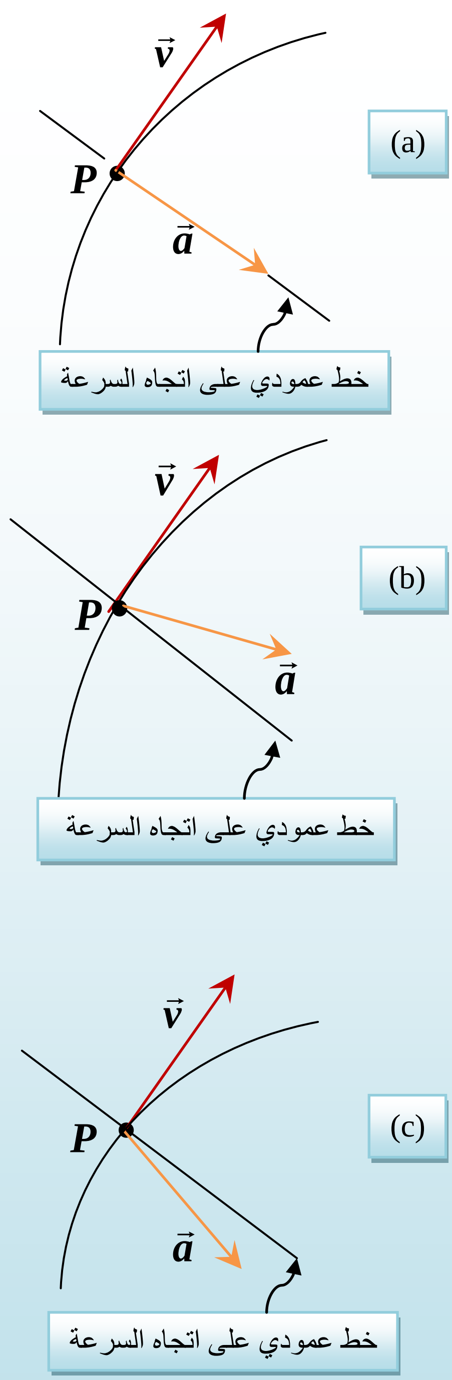
وهذا التسارع يعمل على زيادة نصف قطر تحدب المسار، شكل (4-6-b).

إذا كانت السرعة متغيرة في الاتجاه ومتغيرة في المقدار بشكل متناقص كما هو في الحالة الثالثة، فإن التسارع يكون له جزئين (مركبتين): تسارع موازي $\vec{a}_{\parallel}$ اتجاهه عكس اتجاه السرعة، وتسارع عمودي $\vec{a}_{\perp}$ اتجاهه عمودي على اتجاه السرعة وتكون النتيجة التسارع

$$\vec{a} = \vec{a}_{\parallel} + \vec{a}_{\perp}$$

وهذا التسارع يعمل على تقليل نصف قطر تحدب المسار، شكل (4-6-c).

التسارع الناتج عن تغير مقدار السرعة يسمى أحياناً التسارع المماسي tangential acceleration.

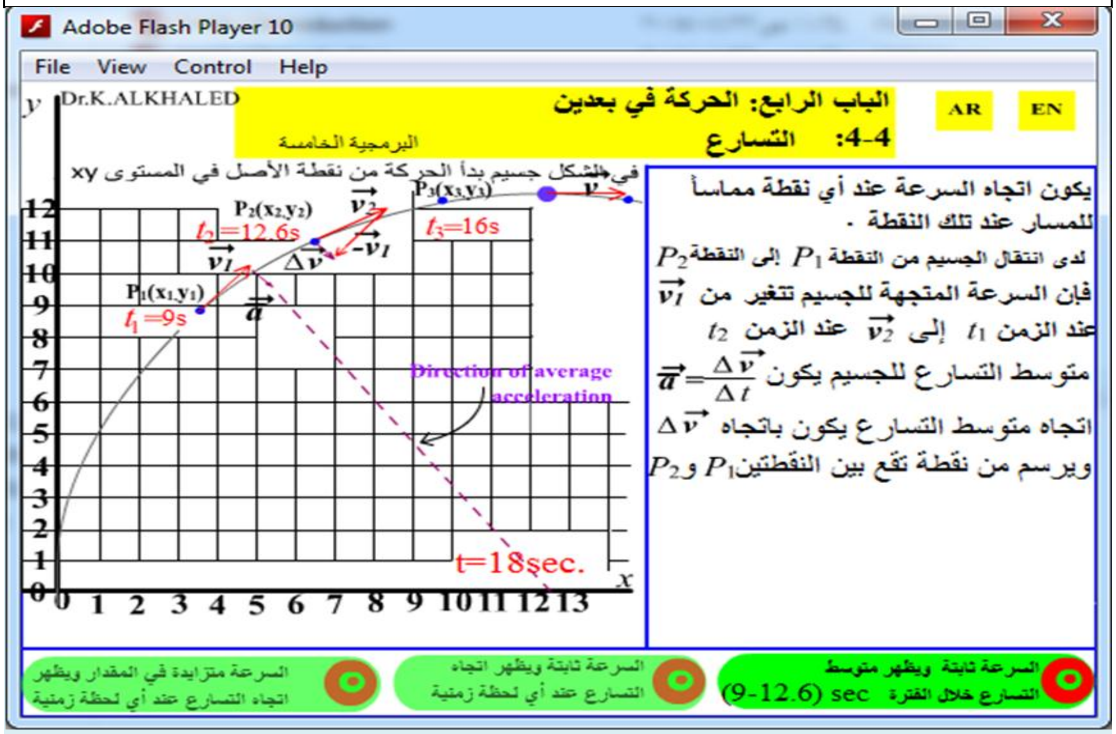


شكل (4-6) ثلاث حالات لمتجهي السرعة والتسارع لجسيم يسير على مسار منحني ماراً بالنقطة P: (a) بسرعة ثابتة، (b) بسرعة متزايدة ، (c) بسرعة متناقصة.

ولمزيدٍ من التوضيح ندعو الطالب للرجوع إلى البرمجية الخامسة لهذا الباب.

البرمجية الخامسة بعنوان: التسارع **Acceleration** .

صورة عن واجهة البرمجية الخامسة للباب الرابع وهي بعنوان التسارع Acceleration .



هذه صورة عن واجهة البرمجية الخامسة للباب الرابع . لاستعمال البرمجية الفعلية ما عليك فعله هو النقر على الدائرة الحمراء الصغيرة في أحد الأزرار الثلاثة المبينة باللون الأخضر ، ثم النقر على زر ابدأ الحركة ثم مراقبة الحركة والنظر فيها لإدراك مفهوم متوسط التسارع و التسارع اللحظي. لقراءة النص في اللغة الانجليزية أنقر عل زر **EN** .

5-4: الحركة في بعدين بتسارع ثابت

Motion In Two Dimensions With Constant Acceleration

درسنا في الباب الثاني حركة جسيم في بعد واحد بتسارع ثابت. في هذا البند سندرس حركة جسيم في بعدين بتسارع ثابت مقداراً واتجاهاً. إن أول يلزمنا معرفته لوصف حركة الجسيم هو متجه الموقع، وقد عرفنا في بداية هذا الباب أن متجه الموقع يكتب

$$\vec{r} = x\ \hat{i} + y\ \hat{j} \qquad \text{..........(4-9)}$$

حيث إن x ، y وبالتالي $\vec{r}$ يتغيروا مع الزمن مادام الجسيم يتحرك.

نستطيع أن نحسب سرعة الجسيم من خلال المشتقة الأولى بالنسبة للزمن لمتجه الموقع كما في المعادلة.....

$$\vec{v} = v_x\hat{i} + v_y\hat{j} \qquad \text{..........(4-10)}$$

وحيث إن دراستنا في هذا البند ستقتصر على أن يكون التسارع $\vec{a}$ ثابتاً مقداراً واتجاهاً، أي إن كل من جزئي (مركبتي) التسارع a_x و a_y سيكون ثابتاً. هذا الكلام في غاية الأهمية والتبسيط. فاعتماداً عليه نستطيع استعمال معادلات وصف الحركة الخطية في كلا الاتجاهين كل على حدة.

فإذا تحرك جسيم على مسار معين في المستوى xy بتسارع ثابت مقداراً واتجاهاً وكان في لحظة زمنية t_1 عند النقطة P_1 ، وتم وصف سرعته على أنها $\vec{v}_1$. وبعد انقضاء فاصل زمني Δt أصبح الجسيم في اللحظة الزمنية t_2 عند النقطة P_2 ، فأن سرعته $\vec{v}_2$ تساوي.

$$\vec{v}_2 = v_{x2}\hat{i} + v_{y2}\hat{j} \qquad \vec{v}_1 = v_{x1}\ \hat{i} + v_{y1}\ \hat{j} \qquad \text{.........(4-18)}$$

بتطبيق معادلات وصف الحركة الخطية في كلا الاتجاهين كل على حدة نحصل على

$$\vec{v}_2 = \left(v_{x1} + a_x\ \Delta t\right)\hat{i} + \left(v_{y1} + a_y\ \Delta t\right)\hat{j} \qquad \text{.........(4-19)}$$

بإعادة ترتيب المعادلة بصورة تؤدي إلى الحصول على معادلة مختصرة للحركة على المسار

$$\vec{v}_2 = v_{x1}\hat{i} + v_{y1}\hat{j} + a_x\Delta t\,\hat{i} + a_y\Delta t\ \hat{j} \qquad \text{.........(4-20)}$$

$$\vec{v}_2 = \vec{v}_1 + \vec{a}\,\Delta t \qquad \text{.........(4-21)}$$

وبشكل عام، تستعمل هذه المعادلة لحساب السرعة عند أي زمن. فعلى اعتبار أن الزمن الابتدائي يساوي صفر $t_i = 0$ ، والسرعة الابتدائية عنده رمزها $\vec{v}_i$ ، فإننا نستطيع كتابة تلك المعادلة على صورة اقتران سرعة (دالة) بدلالة الزمن velocity as a function of time

$$\vec{v}(t)=\vec{v}_i+\vec{a}\,t \qquad \begin{cases} v_x(t)=v_{xi}+a_x t \\ v_y(t)=v_{yi}+a_y t \end{cases} \qquad ....(4\text{-}22)$$

يمكن حساب الإزاحة التي حصلت للجسيم خلال الفاصل الزمني Δt . من المعادلة ....

بكتابة معادلة حساب الإزاحة على الخط المستقيم x، وعلى الخط المستقيم y كل على حدة نحصل على

$$\Delta\vec{r}=\Delta x\,\hat{i}+\Delta y\,\hat{j} \qquad ....(4\text{-}23)$$

$$=\left(v_{x1}\,\Delta t+\frac{1}{2}a_x\,(\Delta t)^2\right)\hat{i}+\left(v_{y1}\,\Delta t+\frac{1}{2}a_y\,(\Delta t)^2\right)\hat{j} \qquad ....(4\text{-}24)$$

بإعادة ترتيب المعادلة بصورة تؤدي إلى معادلة الحركة على المسار

$$\Delta\vec{r}=\left(v_{x1}\hat{i}+v_{y1}\hat{j}\right)\Delta t+\frac{1}{2}\left(a_x\hat{i}+a_y\hat{j}\right)(\Delta t)^2 \qquad ....(4\text{-}25)$$

$$\Delta\vec{r}=\vec{v}_1\,\Delta t+\frac{1}{2}\vec{a}\,\Delta t \qquad ....(4\text{-}26)$$

وبشكل عام، تستعمل هذه المعادلة لحساب متجه الإزاحة عند أي زمن. فعلى اعتبار أن الزمن الابتدائي يساوي صفر $t_i=0$، والموقع الابتدائي عنده رمزه $\vec{r}_i$، والسرعة الابتدائية عنده رمزها $\vec{v}_i$، فإننا نستطيع كتابة تلك المعادلة على صورة اقتران إزاحة (دالة) بدلالة الزمن displacement as a function of time

$$\Delta\vec{r}=\vec{v}_i\,t+\frac{1}{2}\vec{a}\,t$$

وإذا كان الموقع الابتدائي $\vec{r}_i=0$، وهذا نفترضه إذا قلنا أن الجسيم بدأ الحركة من نقطة المرجع التي يكون عندها $x_i=0,\ y_i=0$ فإن معادلة الإزاحة يمكن استعمالها لإيجاد متجه الموقع $\vec{r}$ بدلالة الزمن position as a function of time

$$\vec{r}(t)=\vec{v}_i\,t+\frac{1}{2}\vec{a}\,t \qquad \begin{cases} x(t)=v_{xi}t+\frac{1}{2}a_x t^2 \\ y(t)=v_{yi}t+\frac{1}{2}a_y t^2 \end{cases} \qquad .....(4\text{-}27)$$

Examples 2 A particle moves in the xy plane from the origin at t=0 with initial velocity $\vec{v}_{\circ} = 8\hat{i} - 15\hat{j}$ m/s and a constant acceleration $\vec{a} = 3\hat{i}$ m/s^2. (I) Determine the x and y components of velocity as a function of time . (II) Determine the velocity and speed of the particle at t=4s. (III) Determine the position vector at t=4 s.	**مثال2** جسيم يتحرك في المستوى yx من نقطة الأصل عند الزمن $t_1 = 0$ بسرعة ابتدائية $\vec{v}_{\circ} = 8\hat{i} - 15\hat{j}$ m/s وتسارع ثابت $\vec{a} = 3\hat{i}$ m/s^2. (I) أوجد مركبتي السرعة بدلالة الزمن. (II) أوجد متجه السرعة ومقدار السرعة عند الزمن t=4s. (III) أوجد متجه الموقع عند الزمن $t = 4$s .
الحركة في الاتجاه y . $a_y = 0$ و $v_{y0} = -15$ m/s وباستعمال معادلة الحركة $v_y = v_{y0} + a_y t$ $v_y = (-15)$ m/s وتبقى ثابتة	الحركة في الاتجاه x . $a_x = 3$ m/s^2 و $v_{x0} = 8$ m/s وباستعمال معادلة الحركة $v_x = v_{x0} + a_x t$ $v_x = (8 + 3t)$ m/s تزداد بمعدل 3 m/s

(II) متجه السرعة $\vec{v}$ يتكون من المركبتين

$$\vec{v} = v_x\,\hat{i} + v_y\,\hat{j} = \left[(8+3t)\hat{i} + (-15)\hat{j}\right] \text{m/s}$$

وبإمكاننا الوصول إلى هذه المعادلة مباشرة

$$\vec{v} = \vec{v}_{\circ} + \vec{a}\,t = 8\hat{i} - 15\hat{j} + 3t\,\hat{i} = (8+3t)\hat{i} - 15\hat{j}$$

(III) لإيجاد متجه ومقدار السرعة عند الزمن $t = 4$s نعوض هذا الزمن في معادلة السرعة فنحصل على

$$\vec{v}_{t=4\text{s}} = v_x\,\hat{i} + v_y\,\hat{j} = \left[(8+12)\hat{i} + (-15)\hat{j}\right] = \left(20\hat{i} - 15\hat{j}\right) \text{m/s}$$

مقدار السرعة عند هذا الزمن هو السرعة القياسية speed

$$v_{t=4\text{s}} = \left|\vec{v}_{t=4\text{s}}\right| = \sqrt{v_x^{\,2} + v_y^{\,2}} = \sqrt{(20)^2 + (-15)^2} = 25 \text{ m/s}$$

Examples 3 the position vector of a particle as a function of time is given by

$$\vec{r} = [(4.0\text{m/s})\,t + (2.0\text{m/s}^2)\,t^2]\hat{i} + [(8.0\text{m}) - (1.0\text{m/s}^3)\,t^3]\hat{j}\ \text{m/s.}$$

where *r* is in meters and *t* is in second.(I) Determine the particle's velocity and acceleration as a function of time . (II) Determine the particle's velocity and acceleration at *t*=3 s.

مثال3 أعطي متجه الموقع لجسيم بدلالة الزمن حسب العلاقة، حيث *r* بوحدة المتر و *t* بوحدة الثانية . (I) أوجد سرعة وتسارع الجسيم بدلالة الزمن. (II) أوجد سرعة وتسارع الجسيم عند الزمن *t*=3 s.

(I) لا نستطيع هنا تطبيق معادلات الحركة بتسارع ثابت لأن التسارع كما ستلاحظ سيكون متغيراً بدلالة الزمن. ولإيجاد كل من السرعة والتسارع نشتق متجه الموقع بالنسبة للزمن فنحصل على السرعة. بعد ذلك نشتق متجه السرعة بالنسبة للزمن فنحصل على التسارع.

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = [(4.0\text{m/s}) + (4.0\text{m/s}^2)\,t]\hat{i} + [(0) - (3.0\text{m/s}^3)\,t^2]\hat{j}$$

$$\vec{v} = [(4.0\text{m/s}) + (4.0\text{m/s}^2)\,t]\hat{i} + [-(3.0\text{m/s}^3)\,t^2]\hat{j}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = (4.0\text{m/s}^2)\hat{i} - (6.0\text{m/s}^3)\,t\,\hat{j}$$

وكما تلاحظ فإن التسارع بالاتجاه *x* ثابت بينما في الاتجاه *y* متغير (لماذا ؟).

$$a_y = -(6.0\text{ m/s}^3)\,t \quad \text{و} \quad a_x = 4.0\text{ m/s}^2$$

وكما تلاحظ أيضاً فإن التسارع يتزايد مع الزمن خطياً بالاتجاه *y* السالب.

(II) عند الزمن *t*=3 s يكون كل من السرعة والتسارع

$$\vec{v} = [(4.0\text{m/s}) + (12\text{ m/s})]\hat{i} + [-(27\text{ m/s})]\hat{j}$$

السرعة المتجهة
$$\vec{v}_{t=3\text{s}} = 16\,\hat{i} - 27\,\hat{j}\quad \text{m/s}$$

مقدار السرعة
$$v_{t=3\text{s}} = \sqrt{(16)^2 + (-27)^2} = 31.4\quad \text{m/s}$$

متجه التسارع
$$\vec{a}_{t=3\text{s}} = 4.0\,\hat{i} - 18\,\hat{j}\quad \text{m/s}^2$$

مقدار التسارع
$$a_{t=3\text{s}} = \sqrt{(4)^2 + (-18)^2} = 18.4\quad \text{m/s}^2$$

Examples 4 A particle moves in the xy plane across a path in which the components of the particle position with respect to an origin of coordinates are given as a function of time by $x=-0.25t^2+8.0t+30\,\text{m}$ and $y=0.15t^2-10.0t+35\,\text{m}$.

(I) Determine the particle's position vector, velocity and the acceleration at t=0,5,10,15,20 and 25 s .

مثال4 : جسيم يسير على المستوى xy في مسار بحيث يحدد موقع الكرة بالنسبة لنقطة الأصل حسب معادلتين بدلالة الزمن

$$x=-0.25t^2+8.0t+30\,\text{m}$$

$$y=0.15t^2-10.0t+35\,\text{m}$$

أوجد موقع الكرة، وسرعة الكرة وتسارع الكرة عند الأزمان:

t=0,5,10,15,20 and 25 s .

حسابات متجه الموقع متجه الموقع بدلالة الزمن $\vec{r}(t)$

$$\vec{r}(t)=x(t)\hat{i}+y(t)\hat{j} \quad ، \quad \vec{r}(t)=(r(t),\theta_r)$$

حيث

$$r(t)=|\vec{r}(t)|=\sqrt{(x(t))^2+(y(t))^2} \quad ، \quad \tan\theta_r=\frac{y(t)}{x(t)}$$

عند $t=0\,\text{s}$ فإن $x(0)=30\text{ m}$ و $y(0)=35\text{ m}$ وبالتالي فإن $r(0)=46.1$

عند الزمن $t=5\,\text{s}$ فإن $x(5)=56.25$ و $y(5)=-3.75$ وبالتالي فإن $r(5)=56.37$

بقية الحسابات مبينة في الجدول.

حسابات السرعة المتجهة بدلالة الزمن $\vec{v}(t)$

$$\mathbf{v}(t)=v_x(t)\hat{i}+v_y(t)\hat{j} \quad ، \quad \vec{v}(t)=(v(t),\theta_v)$$

$$v_x(t)=\frac{d\,x(t)}{dt} \quad ، \quad v_y(t)=\frac{d\,y(t)}{dt}$$

$$v_x(t)=\frac{dx(t)}{dt}=-0.5t+6.5 \quad \text{m/s}$$

$$v_y(t)=\frac{dy(t)}{dt}=0.3t-8.5 \quad \text{m/s}$$

$$v(t)=|\vec{v}(t)|=\sqrt{(v_x(t))^2+(v_y(t))^2} \qquad \tan\theta_v=\frac{v_y(t)}{v_x(t)}$$

Examples 4	**تكملة المثال4**

عند $t = 0\,\text{s}$ فإن $v_x(0) = 6.5\ \text{m/s}$ و $v_y(0) = -8.5\ \text{m/s}$ وبالتالي
فإن $v(0) = 10.7\ \text{m/s}$ و $\theta_v = -52.6^\circ$

عند $t = 5\,\text{s}$ فإن $v_x(5) = 6.5\ \text{m/s}$ و $v_y(5) = -8.5\ \text{m/s}$ وبالتالي فإن
$v(5) = 10.7\ \text{m/s}$ و $\theta_v = -52.6^\circ$

بقية الحسابات مبينة في الجدول.

حسابات التسارع بدلالة الزمن $\vec{a}(t)$

$$\vec{a}(t) = a_x(t)\hat{i} + a_y(t)\hat{j} \quad ، \quad \vec{a}(t) = (a(t), \theta_a)$$

$$a_x(t) = \frac{d\,v_x(t)}{dt} \quad ، \quad a_y(t) = \frac{dv_y(t)}{dt}$$

$$a_x(t) = \frac{dx(t)}{dt} = -0.5 \quad \text{m/s}^2 \quad ، \quad a_y(t) = \frac{dy(t)}{dt} = 0.3 \quad \text{m/s}^2$$

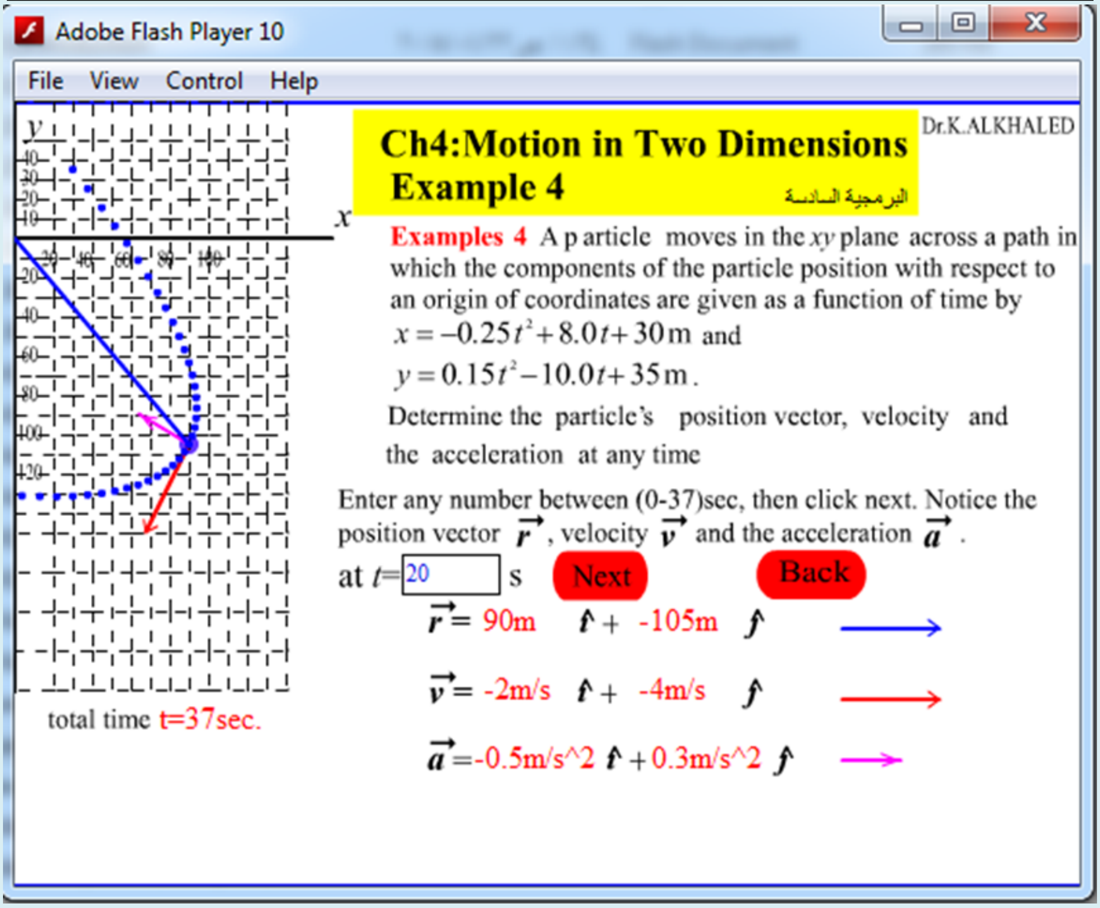
$$a(t) = |\vec{a}(t)| = \sqrt{(a_x(t))^2 + (a_y(t))^2} = 0.58\ \text{m/s}^2 \quad \tan\theta_v = \frac{a_y(t)}{a_x(t)}$$

والجدول التالي يبين الحسابات عن الأزمان المطلوبة:

t sec	x	y	r	θ_r°	v_x	v_y	v	θ_v°	a_x	a_y	a	θ_a°
0	30	35	46.1	48.7	8.0	-10.0	12.8	-51.6 Or 308.4	-0.5	0.3	0.58	148.5
5	63.8	-11.3	64.7	-10.3 Or	5.5	-8.5	10.2	-57.3 Or 302.7	-0.5	0.3	0.58	148.5
10	85.0	-50.0	98.6	-30.9	3.0	-13.0	13.3	-77.4 Or	-0.5	0.3	0.58	148.5
15	93.8	-81.3	124.1	-41.3 Or 318.7	0.5	-5.5	5.52	-85.4 Or 274.6	-0.5	0.3	0.58	148.5
20	90.0	-105.0	138.3	-49.9 Or 310.1	-2.0	-4.0	4.5	-117 Or 243	-0.5	0.3	0.58	148.5
25	73.8	-121.3	141.9	-59.0 Or 301	-4.5	-2.5	5.1	-142.4 Or 217.6	-0.5	0.3	0.58	148.5

ولمزيدٍ من التوضيح حول المثال الرابع ومشاهدة حركة الجسيم وتتبعها لحظة بلحظة ندعو الطالب للرجوع إلى البرمجية السادسة لهذا الباب وهي بعنوان: مثال 4 Example.

صورة عن واجهة البرمجية السادسة للباب الرابع و هي بعنوان مثال 4 Example .



هذه صورة عن واجهة البرمجية السادسة للباب الرابع . لاستعمال البرمجية الفعلية ما عليك فعله هو النقر على زر ابدأ الحركة ثم مراقبة الحركة والنظر فيها . وإذا رغبت في أن تشاهد وصف الحركة عند أي زمن، أدخل رقماً يمثل الزمن بين (0-37 s) ثم أنقر على الزر Next.

6-4: حركة المقذوفات Projectiles Motion

المقذوف جسيم يطلق بسرعة ابتدائية من سطح معين باتجاه يعمل زاوية مع الأفق ويسلك مساراً منحنياً **trajectory** يزيحه عن نقطة انطلاقه في كلا الاتجاهين x و y حيث يشير الاتجاه x إلى بعد موازي لسطح الأرض، ويشير الاتجاه y إلى البعد العمودي على سطح الأرض. إن حركة المقذوفات مألوفة لدينا، فنحن نشاهد تلك الحركة كثيراً في الألعاب الرياضية مثل لعبة كرة القدم ولعبة كرة السلة.

لتحليل حركة الأجسام المقذوفة في الاتجاهين x و y نستند إلى الأمور التالية:

* أولاً: تسارع السقوط الحر (تسارع الجاذبية الأرضية) بالقرب من سطح الأرض ثابت في المقدار والاتجاه، وإهمال في الاتجاه y ، أي إن $(a_y = -g)$.

* ثانياً إهمال مقاومة الهواء لحركة الأجسام في الاتجاه x ، أي إن $(a_x = 0)$.

* ثالثاً: إهمال كل من تقوس سطح الأرض، وحركتها الدورانية والدائرية.

* رابعاً : التعامل مع حركة الجسم المقذوف على أنها حركتين منفصلتين يجمعهما شيء مشترك وهو زمن الحركة على المسار. ومن هذا المنطلق نكتب معادلات الحركة في كلا الاتجاهين كل على حدة مفترضين أن الزمن الابتدائي للحركة $t_0 = 0$ ، وعنده نفترض أن $x_0 = y_0 = 0$.

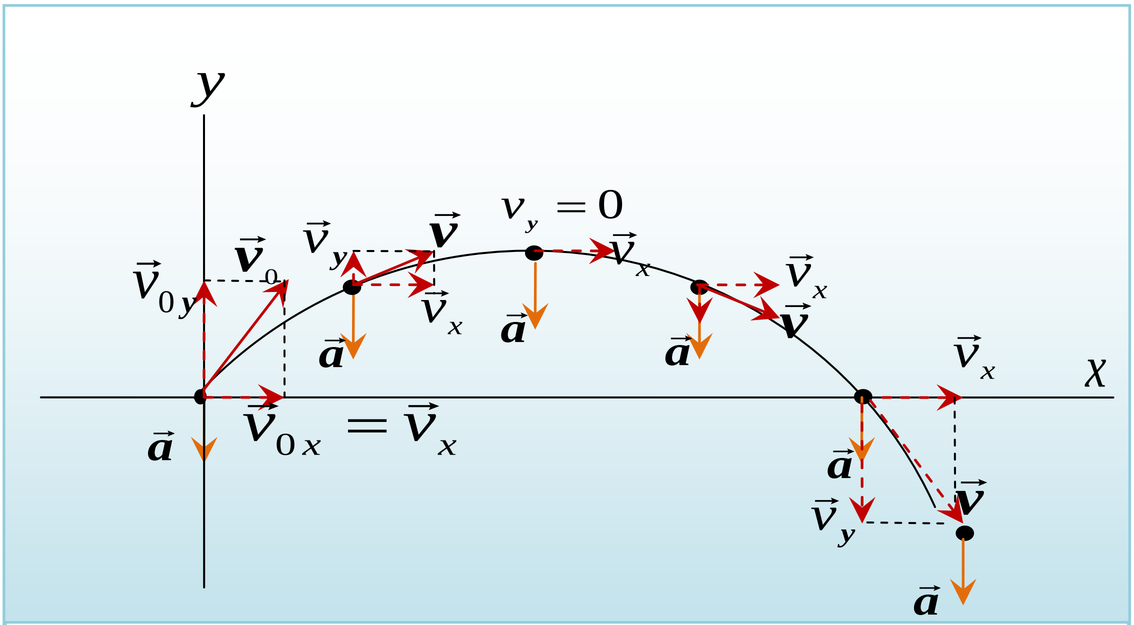
* خامساً: إذا كانت السرعة المتجهة الابتدائية $\vec{v}_0$ تعمل زاوية θ_0 مع الأفق كما في الشكل، نبدأ أولاً بتجزئة السرعة الابتدائية $\vec{v}_0$ إلى جزئين (مركبتين) v_x و v_y اعتماداً على قوانين النسب المثلثية . من الشكل تكون السرعة الابتدائية في كلا الاتجاهين:

$$v_{y0} = v_0 \sin\theta_0 \quad \text{و} \quad v_{x0} = v_0 \cos\theta_0$$

* سادساً: استعمال المعادلتين .... والتعويض بهما ما استندنا إليه، فنحصل على:

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_i + \vec{a}\,t \qquad \begin{cases} v_x(t) = v_{x0}t \\ v_y(t) = v_{y0} + a_y t \end{cases} \qquad .....(4\text{-}28)$$

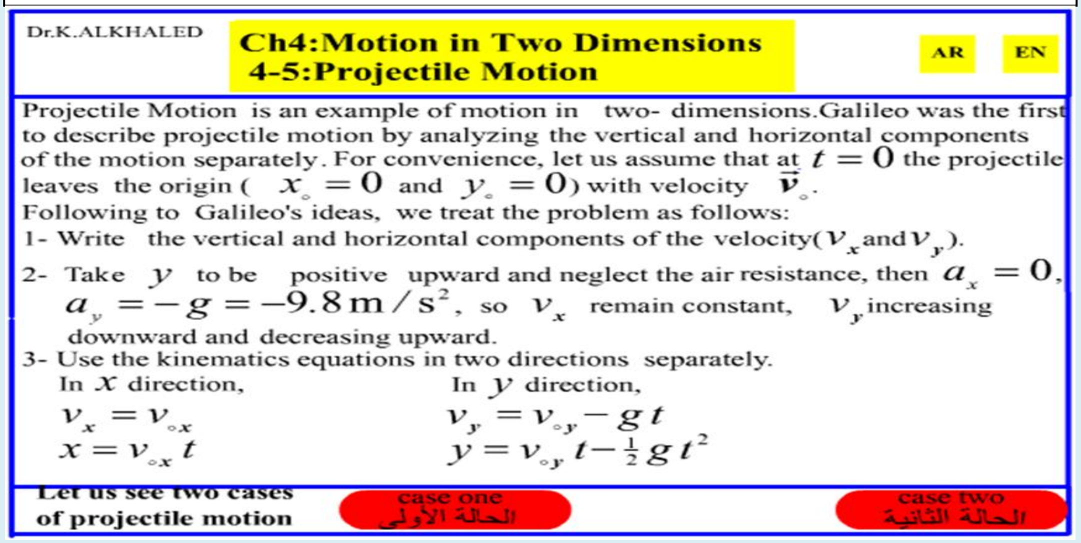
$$\vec{r}(t) = \vec{v}_i\,t + \frac{1}{2}\vec{a}\,t \qquad \begin{cases} x(t) = v_{x0}t \\ y(t) = v_{y0}t + \frac{1}{2}a_y t^2 \end{cases} \qquad ....(4\text{-}29)$$



شكل (7-4) جسيم يتحرك على مسار في المستوى xy . لاحظ أن سرعته الأفقية تبقى ثابتة بينما سرعته العمودية تبدأ بالتناقص منذ لحظة الإطلاق ثم تصبح صفر عند أقصى ارتفاع ثم تبدأ بالتزايد مع تغير الاتجاه.

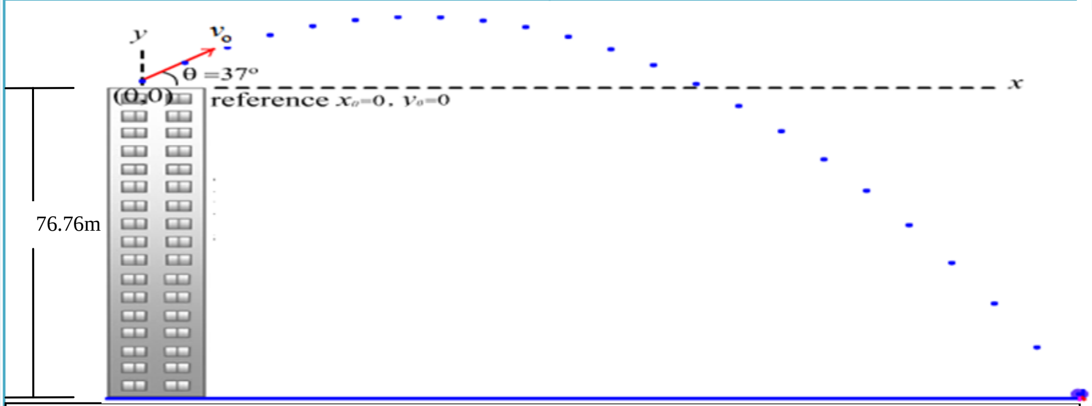
ولمزيدٍ من التوضيح ندعو الطالب للرجوع إلى البرمجية السابعة لهذا الباب وهي بعنوان حركة المقذوفات.

صورة عن واجهة البرمجية السابعة للباب الرابع و هي بعنوان حركة المقذوفات Projectile Motion.



هذه صورة عن واجهة البرمجية السابعة . لاستعمال البرمجية الفعلية ما عليك فعله هو النقر على زر الحالة الأولى أو زر الحالة الثانية . تستطيع التنقل فيما بينهما مع الصفحة الرئيسية . لقراءة النص في اللغة العربية أنقر عل زر **AR** .

Examples 5 A ball is thrown from the top of a building upward at an angle 0f 37° to the horizontal with an initial speed of 30m/s, as in Figure 4.8. If the height of the building is 76.76m. (a) What is the time to reach the maximum height? (b) What is the maximum height reached? (c) How long is the ball in flight? (d) Where does the ball strike the ground? (e) What is the speed of the ball just before it strike the ground?	**مثال5** قذفت كرة من سطح بناية إلى الأعلى باتجاه يصنع زاوية 37° مع الأفق بسرعة مقدارها 30m/s كما في الشكل (8.4) إذا كان ارتفاع البناية 76.76m . (أ) ما هو الزمن للوصول لأقصى ارتفاع؟ (ب) ما هو أقصى ارتفاع تصل إليه الكرة؟ (جـ) ما هو زمن تحليق الكرة؟ (د) أين ترتطم الكرة بالأرض؟ (هـ) ما سرعة الكرة في اللحظة التي ترتطم بها في الأرض؟



الحل:

مركبتي السرعة الابتدائية في الاتجاهين الأفقي والعمودي هما:

The initial components of the velocity in both horizontal and vertical directions are:

$$v_{x0} = v_0 \cos\theta_0 = (30)\times(0.8) = 24\,m/s$$

$$v_{y0} = v_0 \sin\theta_0 = (30)\times(0.6) = 18\,m/s$$

(a) عند أقصى ارتفاع تصبح السرعة العمودية صفراً.

At maximum height , the vertical component of velocity goes to zero.

لإيجاد زمن أقصى ارتفاع t_1 نستعمل المعادلة:

$$v_y = v_{y0} - gt$$

$$0 = v_0 \sin\theta_0 - gt_1 \quad \Rightarrow \quad t_1 = \frac{v_0 \sin\theta_0}{g} = \frac{18}{9.8} = 1.837\ s$$

بدون تقريب $t_1 = 1.837\ s$

D.K.ALKHALED

(b) لإيجاد أقصى ارتفاع نستعمل المعادلة:

$$\Delta y = y_{max} - y_0 = v_{y0} t_1 - \frac{1}{2} g t_1^{2}$$

$$y_{max} - 0 = (18 m/s) \times (1.837 s) - \frac{1}{2}(9.8 m/s^2) \times (1.837 s)^2$$

$$\Rightarrow y_{max} = 16.53 m$$

(c) لإيجاد زمن التحليق نستعمل معادلة الازاحة العمودية مع وضع

$$y_{final} = -75.76 m$$

$$\Delta y = y_{final} - y_0 = v_{y0}\, t_{fligh} - \frac{1}{2} g t_{fligh}^{2}$$

$$-76.76 m - 0 = (18 m/s) \times t_{fligh} - \frac{1}{2}(9.8 m/s^2)(t_{fligh})^2$$

ومنها

$$(t_{fligh})^2 - (3.673) \times t_{fligh} - (15.665) = 0 \quad \Rightarrow \quad t_{fligh} = 6.2 s$$

(d) أيجاد اين ترتطم الكرة بالأرض يعني إيجاد الإزاحة الأفقية الكلية (المدى الأفقي) Δx.

نستعمل معادلة الازاحة مع الانتباه إلى أن التسارع في الاتجاه الأفقي يساوي صفر.

$$\Delta x = v_{xo}\, t_{fligh} = (24 m/s)(6.2 s) \quad \Rightarrow \quad \Delta x = 148.8 m$$

(e) إيجاد سرعة الكرة في اللحظة التي ترتطم بها في الأرض يتطلب إيجاد محصلة المركبتين الأفقية والعمودية للسرعة.

السرعة الأفقية تبقى ثابتة وهي $v_x = 24 m/s$.

أما السرعة العمودية فتكون متغيرة مع الزمن، تتناقص في البداية إلى أن تصبح صفراً عند أقصى ارتفاع، ثم تبدأ في الزيادة إلى تصبح في النهاية:

$$v_{yfinal} = v_{y0} - g\, t_{fligh} = (18 m/s) - (9.8 m/s^2) \times (6.2 s)$$

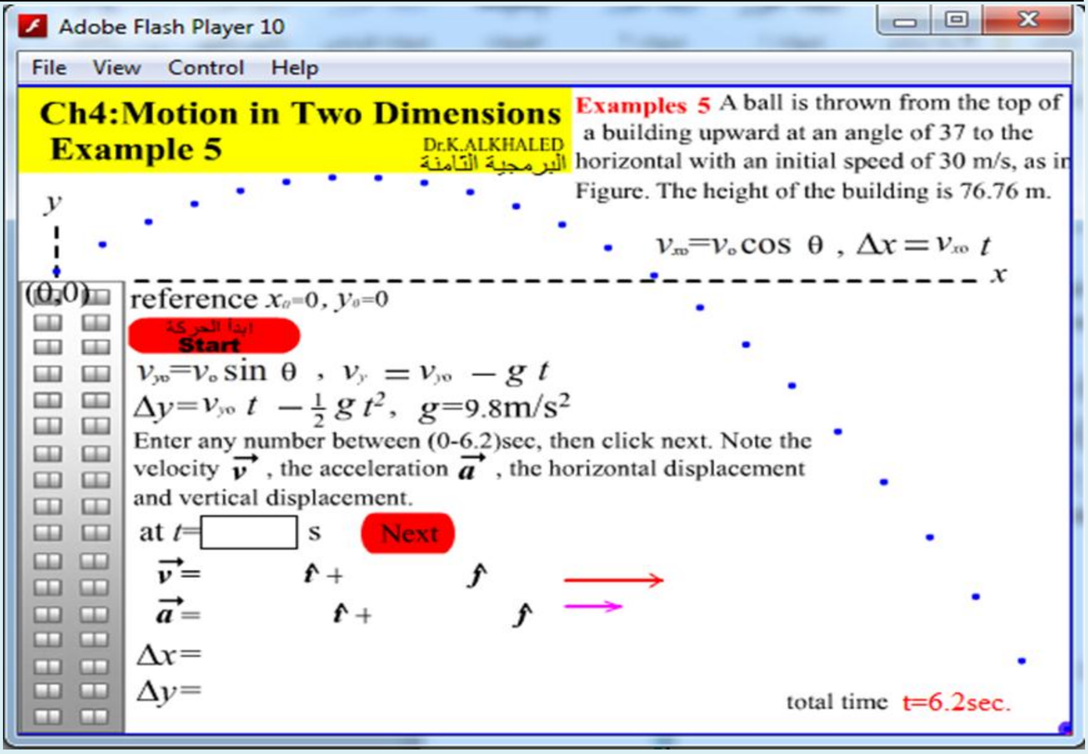
$v_{yfinal} = -42.76 m/s$ لاحظ الإشارة.

$$v = \sqrt{(v_x)^2 + (v_{yfinal})^2}\ \sqrt{(24)^2 + (-42.76)^2}$$

$$v = 49 m/s$$

ولمزيدٍ من التوضيح حول المثال الخامس ومشاهدة حركة الكرة وتتبعها لحظة بلحظة ندعو الطالب للرجوع إلى البرمجية الثامنة لهذا الباب وهي بعنوان: مثال 5 Example.

صورة عن واجهة البرمجية الثامنة للباب الرابع وهي بعنوان مثال 5 Example .



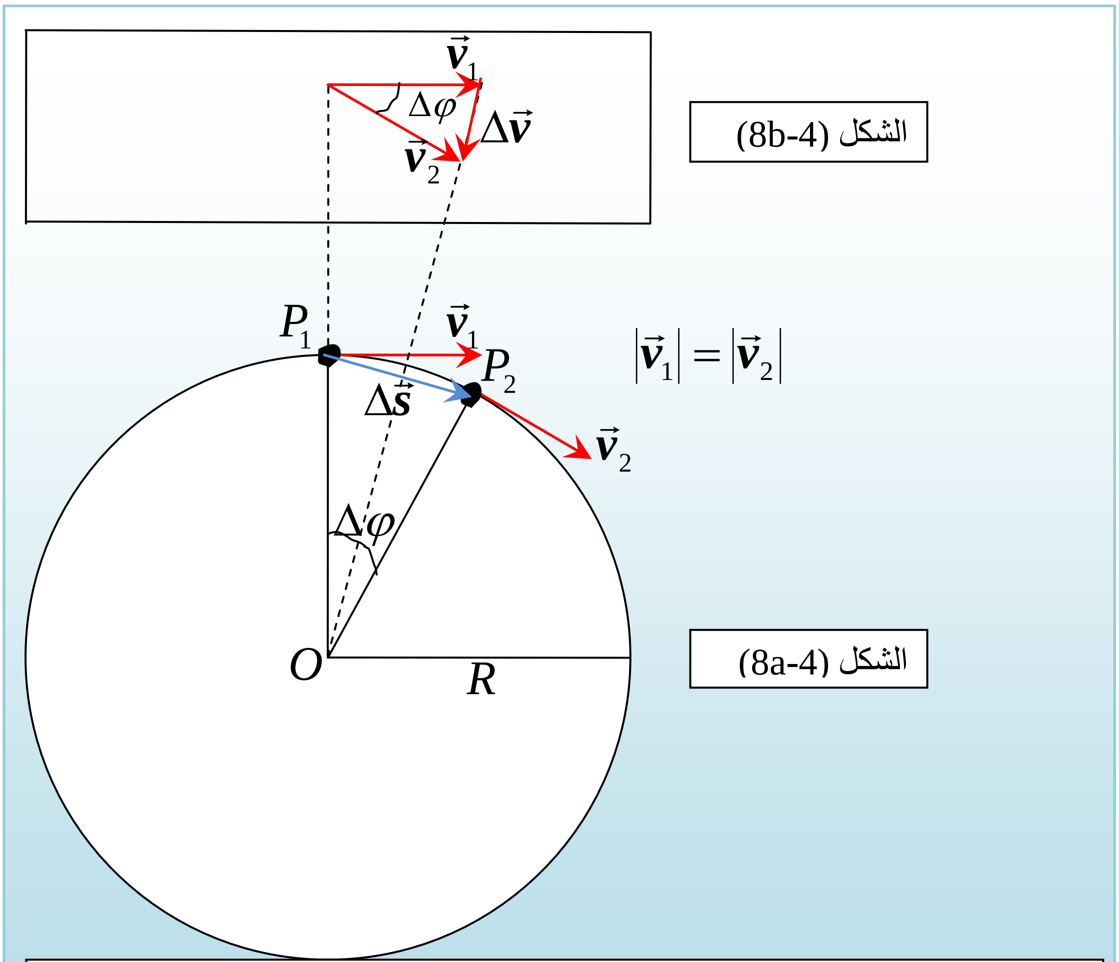
هذه صورة عن واجهة البرمجية الثامنة للباب الرابع . لاستعمال البرمجية الفعلية ما عليك فعله هو النقر على زر ابدأ الحركة ثم مراقبة الحركة والنظر فيها . وإذا رغبت في أن تشاهد وصف الحركة عند أي زمن، أدخل رقماً يمثل الزمن بين (0-6.2 s) ثم أنقر على الزر Next.

7-4: الحركة الدائرية المنتظم Uniform Circular Motion

رأينا في البند الرابع أن الجسيم عندما يتحرك على مسار منحني، فإن اتجاه سرعته يتغير، ونتيجة لذلك يكون أحد جزئي تسارعه (إحدى مركبتي تسارعه) عمودي على المسار، ويحدث ذلك حتى وإن كان مقدار سرعته ثابت لا يتغير. في هذا البند سوف نقوم بحساب تسارع جسيم يتحرك على مسار دائري بسرعة ثابتة، وهي حالة خاصة من الحركة على مسار منحني.

عندما يتحرك جسيم على مسار دائري بسرعة ثابتة المقدار، فإن الحركة هذه تسمى الحركة الدائرية المنتظمة. توجد أمثلة كثيرة على مثل هذه الحركة؛ مثلاً سيارة تنعطف بسرعة ثابتة على مسار منحني نصف قطره ثابت، طفل يُلَوِحُ خيطاً مربوط بطرفه الآخر كرة صغيرة لتدور بسرعة ثابتة فوق رأسه، قمر صناعي يدور حول الكرة الأرضية. في الحركة الدائرية المنتظمة يوجد للتسارع جزء واحد (مركبة واحدة) هو الجزء العمودي على المسار الدائري وهو بطبيعة الحال يكون عمودياً على اتجاه السرعة، فاتجاه السرعة يتغير باستمرار ليكون مماساً للمسار الدائري، فيكون اتجاه التسارع نحو مركز المسار الدائري، ولذلك يُسَمى التسارع المركزي **centripetal acceleration**.

الشكل (8a-4)... يبين جسيم يتحرك بسرعة ثابتة المقدار على مسار دائري مركزه O ونصف قطره R . إذا تحرك الجسيم من النقطة P_1 إلى النقطة P_2 على محيط المسار الدائري خلال فاصل زمني Δt فإن الإزاحة الحاصلة له $\Delta\vec{s}$. إن التغير في السرعة خلال هذا الفاصل الزمني مُبَين في الشكل (8b-4).



الشكل (a8-4) جسيم يسير في حركة دائرية منتظمة. عندما ينتقل الجسيم من النقطة P_1 إلى النقطة P_2 على محيط المسار الدائري خلال فاصل زمني Δt فإن اتجاه السرعة يتغير. الشكل (b8-4) يبين اتجاه التغير في السرعة.

الزاوية $\Delta\varphi$ المبينة في الشكل (a8-4) هي نفسها $\Delta\varphi$ المبينة في الشكل (b8-4) لأن $\vec{v}_1$ عمودية على الخط OP_1 ، و $\vec{v}_2$ عمودية على الخط OP_2 . ولذلك يكون المثلث OP_1P_2 في الشكل (a8-4) مشابه للمثلث الذي ضلعيه $\vec{v}_1$ و $\vec{v}_2$ كما في الشكل (b8-4)، ومن هذا التشابه نستنتج أن

$$\frac{|\Delta\vec{v}|}{|\vec{v}_1|} = \frac{|\Delta\vec{s}|}{R} \qquad \text{أو} \qquad |\Delta\vec{v}| = \frac{v_1}{R}\Delta s \qquad .....(4\text{-}30)$$

إن مقدار متوسط التسارع $\bar{a}$ خلال الفاصل الزمني Δt يكون

$$\bar{a} = \frac{|\Delta\vec{v}|}{\Delta t} = \frac{v_1}{R}\frac{\Delta s}{\Delta t} \qquad .....(4\text{-}31)$$

عندما يكون الفاصل الزمني يقترب من الصفر فإن النقطة P_1 تكون قريبة جداً من النقطة P_2،

وعليه ، فإنه عند النقطة P_1 يكون مقدار التسارع اللحظي a

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v_1}{R}\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{v_1}{R}\lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}$$

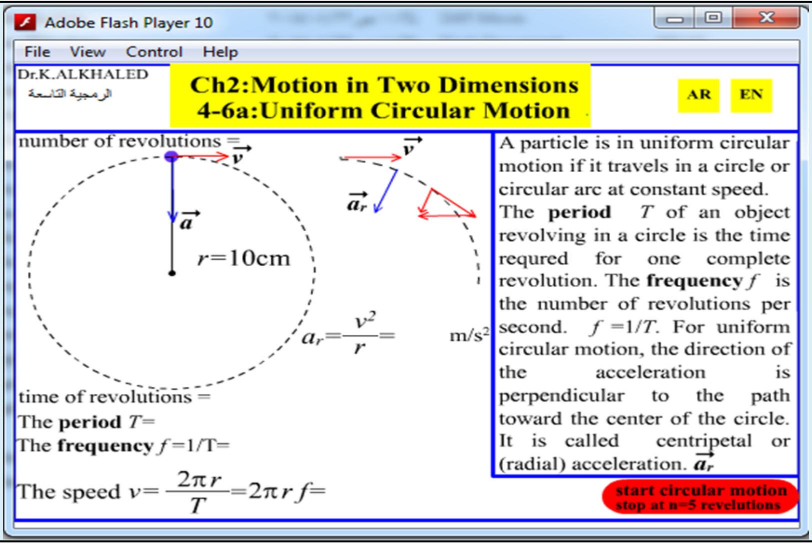
ولكن $\lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}$ هي السرعة القياسية v_1 عند النقطة P_1. وأيضا، P_1 يمكن أن تكون أي نقطة على المسار الدائري، ولذلك يمكن إزالة الرمز الدليلي السفلي subscript لرمز السرعة القياسية. في هذه الحالة، فإن التسارع a يساوي

$$a = \frac{v^2}{R} \quad .....(4\text{-}32)$$

ونظراً لأن اتجاه هذا التسارع يتجه على نصف القطر نحو المركز، فقد أضفنا الرمز الدليلي السفلي "rad" ليشير إلى أنه تسارعاً مركزياً a_{rad}، وأحياناً يكتفى بالرمز a_r. $a_{rad} = \frac{v^2}{R}$.

ولمزيدٍ من التوضيح ندعو الطالب للرجوع إلى البرمجية التاسعة للباب الرابع وهي بعنوان الحركة الدائرية المنتظمة Uniform Circular Motion.

صورة عن واجهة البرمجية التاسعة للباب الرابع وهي بعنوان الحركة الدائرية المنتظمة Uniform Circular Motion.



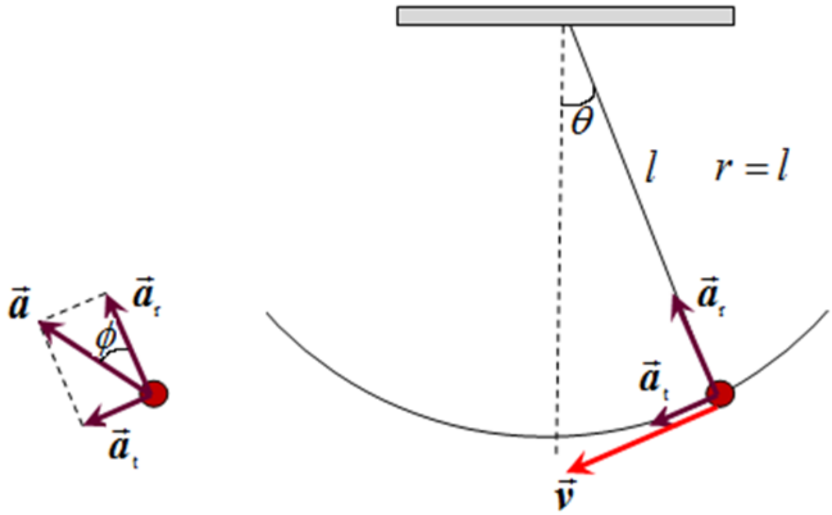
هذه صورة عن واجهة البرمجية التاسعة للباب الرابع . لاستعمال البرمجية الفعلية ما عليك فعله هو النقر على زر start circular motion ثم مراقبة الحركة والنظر فيها .

Examples 6: Moving ball with variable radial and tangential accelerations.

A ball suspended by a cord of length 0.5 m, swings in a vertical circle under the influence of gravity, as in Figure. If the velocity is 1.5 m/s when θ is 20°. Find the tangential acceleration, radial acceleration, and the magnitude and direction of the total acceleration.

مثال 6 : كرة تتحرك بتسارع مركزي متغير وتسارع ومماسي متغير.

كرة معلقة بخيط طوله 0.5 m تتأرجح بمسار قوسي دائري عمودي تحت تأثير الجاذبية فقط، كما في الشكل. إذا كانت السرعة تساوي 1.5 m/s عندما كانت الزاوية $\theta = 20^{\circ}$. أوجد التسارع المماسي، والتسارع المركزي، ومقدار واتجاه التسارع الكلي.



الحل: التسارع المركزي radial acceleration

$$a_r = \frac{v^2}{r} = \frac{(1.5\,\text{m/s})^2}{0.5\,\text{m}} = 4.5\,\text{m/s}^2$$

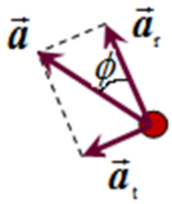
إن نصف قطر المسار الدائري r هو طول الخيط l.

لاستيعاب مفهوم التسارع المماسي tangential acceleration ارجع إلى البند الرابع. أما معادلة التسارع المماسي فستتوضح أكثر عندما ندرس قوانين نيوتن في الحركة، لكن سنضعها الآن دون توضيح.

$$a_t = g\sin\theta = (9.8\,\text{m/s}^2)(\sin\ 20)$$

$$= (9.8\,\text{m/s}^2)(0.342) = 3.35\,\text{m/s}^2$$

تكملة حل مثال 6:



بما إن التسارع الكلي هو مجموع التسارعين

$$\vec{a} = \vec{a}_r + \vec{a}_t$$

فإن مقدار التسارع الكلي

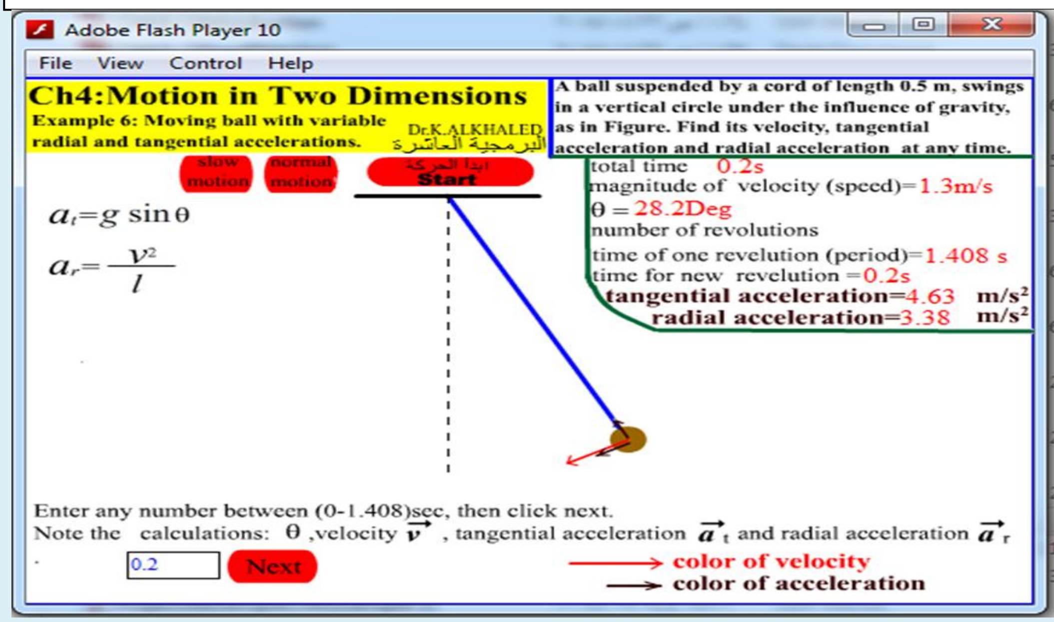
$$a = \sqrt{a_r^{\,2} + a_t^{\,2}} = \sqrt{(4.5)^2 + (3.35)^2} = 5.61\ \text{m/s}^2$$

واتجاهه يحدد بالزاوية ϕ المبينة في الشكل

$$\tan\phi = \frac{a_t}{a_r} = \frac{3.35\ \text{m/s}^2}{4.5\ \text{m/s}^2} = 0.7777 \ \Rightarrow\ \phi = 37.87^\circ$$

ولمزيدٍ من التوضيح والتعمق بخصوص هذا المثال ندعو الطالب للرجوع إلى البرمجية العاشرة للباب الرابع

صورة عن واجهة البرمجية العاشرة للباب الرابع وهي بعنوان **Examples 6:**
Moving ball with variable radial and tangential accelerations.



هذه صورة عن واجهة البرمجية العاشرة للباب الرابع . لاستعمال البرمجية الفعلية ما عليك فعله هو النقر على زر ابدا الحركة ثم مراقبة الحركة والنظر فيها . وإذا رغبت في أن تشاهد وصف الحركة عند أي زمن، أدخل رقماً يمثل الزمن بين (0-1408 s) ثم أنقر زر Next. لمشاهدة الحركة البطيئة أنقر زر slow motion ثم أنقر زر ابدا الحركة لمشاهدة الحركة العادية أنقر زر normal motion ثم أنقر زر ابدا الحركة .
حاول عدة مرات مشاهدة الحركة، في كل مرة حاول أن تركز على المفهوم الذي تريده .

8-4: السرعة المتجهة النسبية والتسارع النسبي

Relative Velocity and Relative Acceleration

في هذا البند سنتعرف على وصف مشاهدة لحركة ما يصفها شخصين كل منهما يكون في إطار مرجعي مختلف عن الآخر. ولتوضيح هذه المقدمة، افترض أن ثلاث سيارات تسير عل طريق مستقيم، السيارة R قادمة من الشرق بسرعة قياسية (speed) 70km/h بالنسبة لشرطي المرور P واقفاً يراقب الطريق ، والسيار Y قادمة من الغرب بسرعة قياسية 70km/h بالنسبة لنفس الشرطي، والسيارة G قادمة من الغرب بسرعة 90km/h بالنسبة لنفس الشرطي. إن سرعة السيارة R القياسية بالنسبة لشخص يركب السيارة Y ستكون 140km/h ، وإن سرعة السيارة G القياسية بالنسبة للشخص الذي يركب السيارة Y ستكون 20km/h. نلاحظ أن قياس السرعة يختلف باختلاف الاطار المرجعي الذي يكون فيه المشاهد.

عند تعيين السرعة النسبية، يجب:

١. رسم مخط للحركة.

٢. ترميز السرعة بحرفين سفليين دليليين، الحرف الأول يشير إلى الجسم المتحرك، والحرف الثاني يشير إلى الاطار المرجعي. فمثلاً $\vec{v}_{RP}$ هي سرعة السيارة R بالنسبة لشرطي المرور P . $\vec{v}_{GY}$ هي سرعة السيارة G بالنسبة للسارة Y .

٣. مراعاة أن السرعة النسبية للجسم الأول بالنسبة للجسم الثاني تكون مساوية في المقدار ومعاكسة في الاتجاه للسرعة النسبية للجسم الثاني بالنسبة للجسم الأول.

ومثال على ذلك:

$$\vec{v}_{RP} = -\vec{v}_{PR}$$

أي إن الشخص الموجود في السيارة يشاهد شرطي المرور يتحرك نحوه بنفس مقدار السرعة.

$\vec{v}_{RP} = 70\,\text{km/h},\ \text{west}$ (سرعة السيارة الحمراء كما يشاهدها شرطي المرور، مقدار السرعة 70km/h واتجاهها إلى الغرب)

$\vec{v}_{PR} = 70\,\text{km/h},\quad \text{east}$ (سرعة شرطي المرور كما يشاهدها شخص في السيارة الحمراء، مقدار السرعة 70km/h واتجاهها إلى الشرق)

٤. اجراء عملية الحسابات على كميات متجهة كما تعلمنا في الباب الثالث ضمن النسق التالي:

$$\vec{v}_{GY} = \vec{v}_{GP} + \vec{v}_{PY}$$

$$\vec{v}_{GY} = 90\,km/h + (-70\,km/h) = 20\,km/h$$

أي إن سرعة السيارة الخضراء كما يشاهدها شخص في السيارة الصفراء تساوي $20\,km/h$ إلى الشرق.

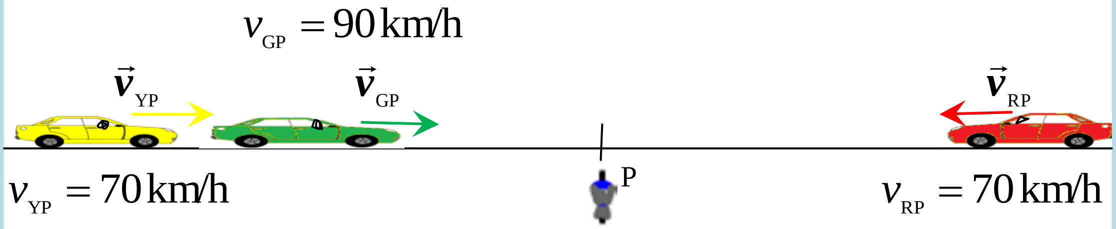
الشكل (4-9) توضيح تعيين السرعة النسبية.

سرعة السيارة الحمراء R كما يشاهدها شرطي المرور P ، مقدار السرعة 70km/h واتجاهها إلى الغرب.

سرعة السيارة الصفراء Y كما يشاهدها شرطي المرور P ، مقدار السرعة 70km/h واتجاهها إلى الشرق.

سرعة السيارة الخضراء G كما يشاهدها شرطي المرور P ، مقدار السرعة 90km/h واتجاهها إلى الشرق.

سرعة شرطي المرور P كما يشاهدها شخص في السيارة الحمراء، مقدار السرعة 70km/h واتجاهها إلى الشرق.

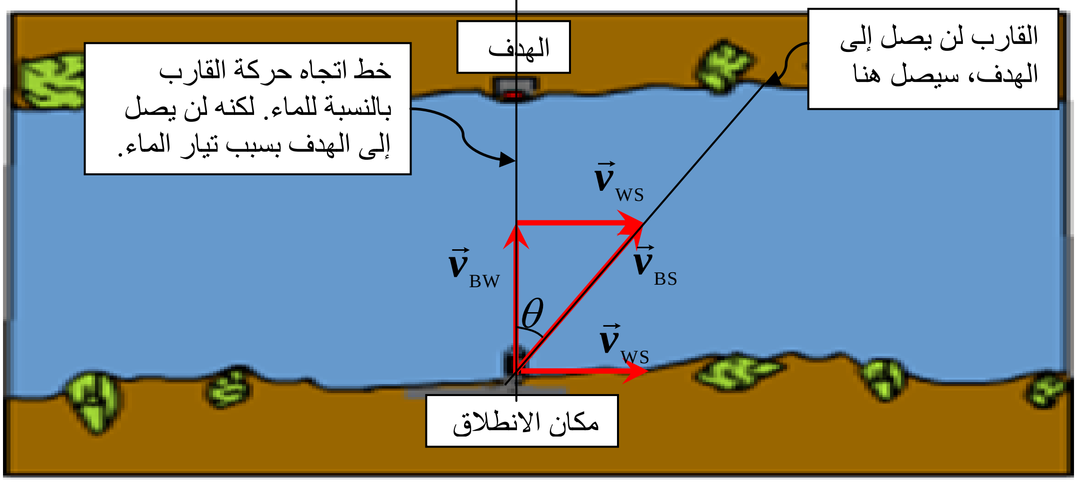


Examples 7: A Boat Crossing a River.

A boat heads directly across the river with speed 1.9 m/s relative to the water current ($v_{BW} = 1.9\,\mathrm{m/s}$). The water in the river has a speed of 1.4 m/s to the east relative to person on the shore ($v_{WS} = 1.4\,\mathrm{m/s}$). Determine the velocity of the boat with respect to person on the shore ($\vec{v}_{BS} = ?$).

مثال 7 : قارب يعبر النهر .

تحرك قارب من نقطة على شاطئ نهر إلى نقطة أخرى مقابلة لها على الشاطئ الآخر للنهر بسرعة 1.9 m/s بالنسبة لتيار الماء. إذا كان جريان الماء إلى الشرق بالنسبة لشخص يقف على الشاطئ بسرعة 1.4 m/s . أوجد مقدار سرعة القارب واتجاهه بالنسبة لشخص يقف على الشاطئ.



الحل: بعد رسم مخطط الحركة نستطيع أن نكتب :

$$\vec{v}_{BS} = \vec{v}_{BW} + \vec{v}_{WS}$$

حيث $\vec{v}_{WS}$ سرعة تيار الماء بالنسبة للشاطئ.

$\vec{v}_{BW}$ سرعة القارب بالنسبة لتيار الماء.

$\vec{v}_{BS}$ سرعة القارب بالنسبة للشاطئ.

وعليه يكون مقدار سرعة القارب بالنسبة للشاطئ :

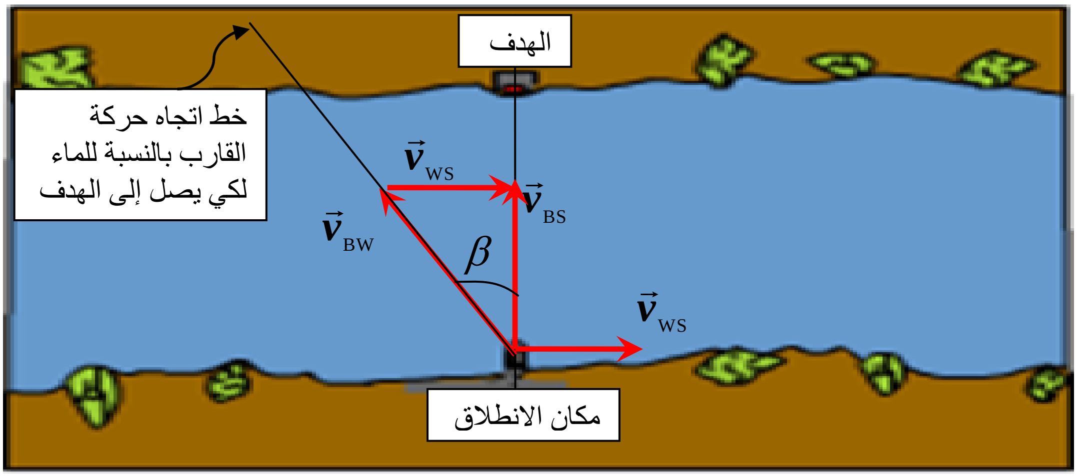
$$v_{BS} = \sqrt{(v_{BW})^2 + (v_{WS})^2} = \sqrt{(1.9\,\mathrm{m/s})^2 + (1.4\,\mathrm{m/s})^2} = 2.36\ \mathrm{m/s}$$

واتجاه السرعة نستطيع أن نعرفه من خلال حساب الزاوية

$$\tan\theta = \frac{v_{WS}}{v_{BW}} = \frac{1.4}{1.9} = 0.7368 \quad \Rightarrow \quad \theta = 36.4^\circ$$

سرعة القارب بالنسبة للشاطئ تكتب $\vec{v}_{BS} = 2.36\,\mathrm{m/s},\ 53.6^\circ$ north of east

Examples 8: A Boat Crossing a River. (Heading upstream.) At what upstream angle must the boat head with speed 1.9 m/s relative to the water current ($v_{BW} = 1.9\,\text{m/s}$) to reach the goal if the water in the river has a speed of 1.4 m/s to the east relative to person on the shore ($v_{WS} = 1.4\,\text{m/s}$).	**مثال 8 : قارب يعبر النهر .** **(توجيه القارب ليصل إلى الهدف.)** بأي زاوية يجب توجيه قارب يسير بسرعة 1.9 m/s بالنسبة لتيار الماء. ليصل إلى الهدف إذا كان جريان الماء إلى الشرق بالنسبة لشخص يقف على الشاطئ بسرعة (1.4 m/s) .



الحل: بعد رسم مخطط الحركة نستطيع أن نكتب :

$$\vec{v}_{BS} = \vec{v}_{BW} + \vec{v}_{WS}$$

حيث $\vec{v}_{WS}$ سرعة تيار الماء بالنسبة للشاطئ.

$\vec{v}_{BW}$ سرعة القارب بالنسبة لتيار الماء.

$\vec{v}_{BS}$ سرعة القارب بالنسبة للشاطئ.

الزاوية المطلوبة هي β

$$\sin\beta = \frac{v_{WS}}{v_{BW}} = \frac{1.4}{1.9} = 0.7368 \qquad \Rightarrow \beta = 47.46^\circ$$

وتكون مقدار سرعة القارب بالنسبة للشاطئ :

$$v_{BS} = \sqrt{(v_{BW})^2 + (v_{WS})^2 + 2(v_{BW})(v_{WS})\cos(\beta + 90)}$$

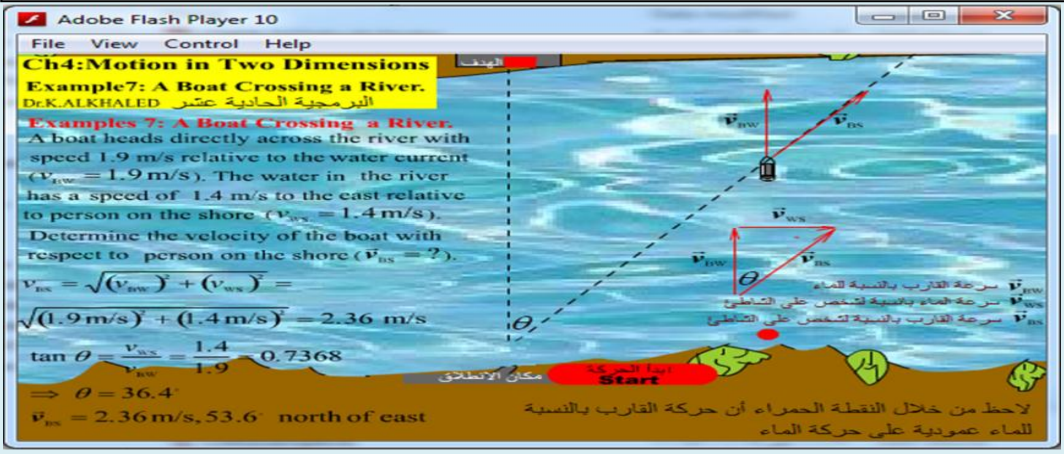
لاحظ أنه في حالة $\beta = 0$ تكون الحركة كما هو في المثال 7 .

$$v_{BS} = \sqrt{(1.9\,\text{m/s})^2 + (1.4\,\text{m/s})^2 + 2(1.9\,\text{m/s})(1.4\,\text{m/s})(-0.7368)}$$

$$v_{BS} = 1.28\ \text{m/s}$$

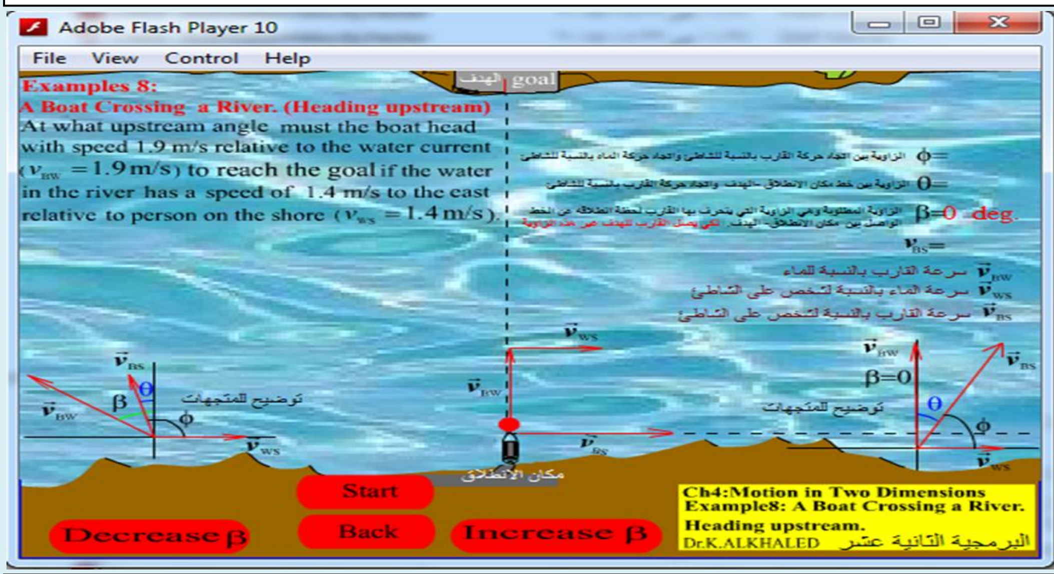
ولمزيدٍ من التوضيح والتعمق بخصوص المثالين 7 و 8 ندعو الطالب للرجوع إلى البرمجيتين، البرمجية الحادية عشر والبرمجية الثانية عشر للباب الرابع .

Examples 7: صورة عن واجهة البرمجية الحادية عشر للباب الرابع وهي بعنوان A Boat Crossing a River. قارب يعبر النهر .



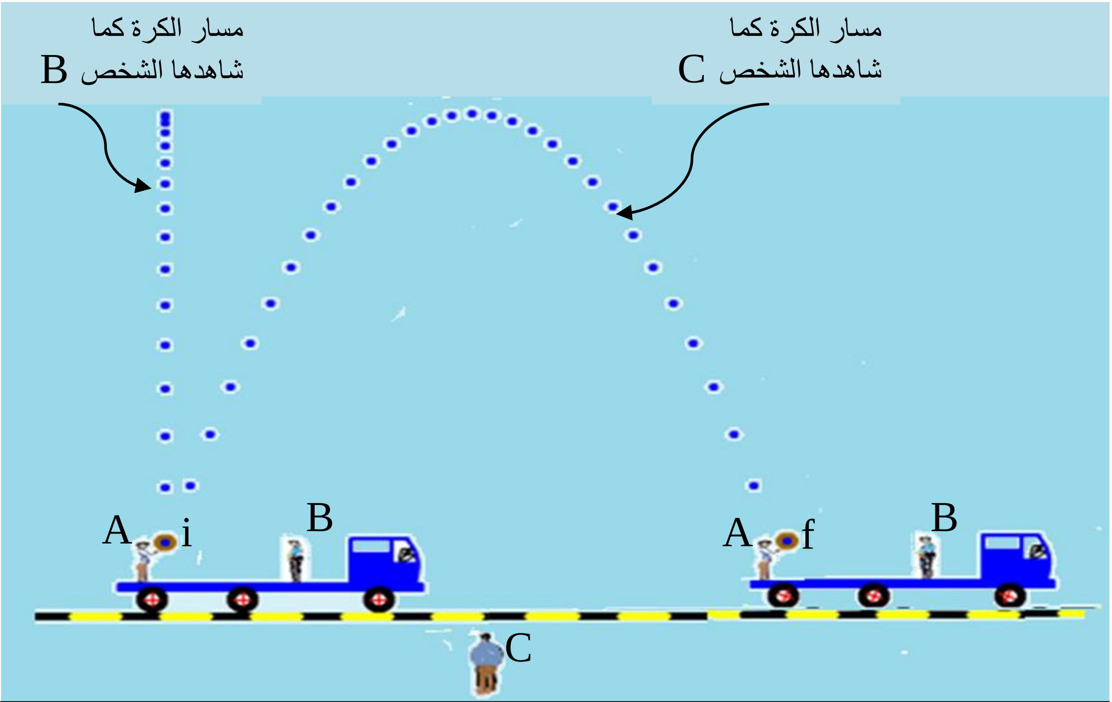
هذه صورة عن واجهة البرمجية الحادية عشر للباب الرابع . لاستعمال البرمجية الفعلية ما عليك فعله هو النقر على زر ابدأ الحركة ثم مراقبة الحركة والنظر فيها .
حاول عدة مرات مشاهدة الحركة من خلال النقر على زر ابدأ الحركة .

Examples8: صورة عن واجهة البرمجية الثانية عشر للباب الرابع وهي بعنوان قارب يعبر النهر (توجيه القارب ليصل إلى الهدف) .
A Boat Crossing a River (Heading upstream).



هذه صورة عن واجهة البرمجية الثانية عشر للباب الرابع . لاستعمال البرمجية الفعلية ما عليك فعله هو توجيه القارب من خلال النقر على زر زيادة β أو تقليل β ثم النقر على زر ابدأ الحركة ثم مراقبة الحركة والنظر فيها . حاول عدة مرات مشاهدة الحركة من خلال النقر على زر رجوع Back.

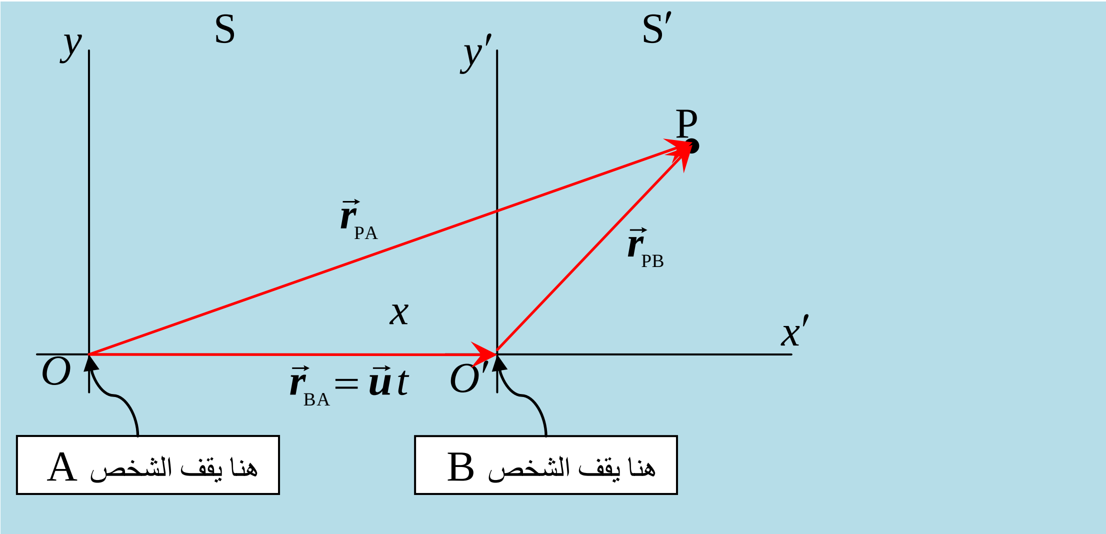
هناك العديد من الأمثلة التي نشاهدها في حياتنا اليومية ونرتكب أخطاءً في تفسيرها. ولكن إذا أدركنا الحركة النسبية نستطيع استيعاب ما يحدث، ومثال على ذلك، تخيل نفسك في باص طويل، أو على شاحنة طويلة الشكل (4-12)، وكان هناك شخص يرمي بكرة إلى الأعلى، كيف ستشاهد المشهد؟ وكيف سيشاهده شخص يقف على الشارع مقابل الشاحنة لحظة رمي الكرة؟



الشكل (4-12) الشخص A يرمي الكرة إلى الاعلى وهو يقف على الشاحنة التي تسير بسرعة ثابتة. الشخص B شاهد رمي الكرة ووصفها لنا بأنها حركة إلى الأعلى بخط مستقيم. الشخص C الذي يقف على الطريق شاهد رمي الكرة ووصفها لنا بأنها حركة مقذوفة إلى الأعلى بدأت من الموقع i وانتهت في الموقع f.

الشخص A يرمي الكرة إلى الاعلى وهو يقف على الشاحنة التي تسير بسرعة ثابتة. الشخص B شاهد رمي الكرة ووصفها لنا بأنها حركة إلى الأعلى بخط مستقيم حيث انطلقت الكرة بالنسبة له إلى الأعلى . الشخص C الذي يقف على الطريق شاهد رمي الكرة ووصفها لنا بأنها حركة مقذوفة إلى بدأت من الموقع i وانتهت في الموقع f، حيث انطلقت الكرة بالنسبة له بسرعتين: السرعة الأول أفقية مساوية لسرعة الشاحنة، والسرعة الثانية عمودية إلى الأعلى.

بعد أن أصبح لدينا فكرة عن الحركة النسبية، نستطيع أن نصف هذه الحركة بعمومية من خلال استعمال نظام الاحداثيات. تخيل شخصين يقف كل منهما في نقطة الأصل لمرجعين من الاحداثيات، المرجع الأول ثابت بالنسبة للأرض نرمز له بالرمز S ويقف في نقطته الأصل الشخص A ، المرجع الثاني نرمز له بالرمز S' مطابق للمرجع الأول عند الزمن $t=0$ لكنه يتحرك بسرعة ثابتة $\vec{u}$ بالنسبة للمرجع الأول ويقف في نقطته الأصل الشخص B، وكل من الشخصين يراقبان حركة النقطة P وطُلب منهما وصف موقع وسرعة وتسارع النقطة P.



x

الشكل (4-13) S إطار مرجعي ويقف في نقطته الأصل الشخص A ، الاطار المرجعي S' مطابق للمرجع الأول عند الزمن $t=0$ لكنه يتحرك بسرعة ثابتة $\vec{u}$ بالنسبة للاطار المرجعي الأول ويقف في نقطته الأصل الشخص B، وكل من الشخصين يراقبان حركة النقطة P وطُلب منهما وصف موقع وسرعة وتسارع النقطة P.

وصف الموقع $\vec{r}$: إن الشخص A سيصف موقع النقطة P بمتجه الموقع $\vec{r}_{PA}$، والشخص B سيصف موقع النقطة P بمتجه الموقع $\vec{r}_{PB}$، إن العلاقة بين المتجهين،

$$\vec{r}_{PA}=\vec{r}_{PB}+\vec{u}\,t \qquad \text{أو} \qquad \vec{r}_{PA}=\vec{r}_{PB}+\vec{r}_{BA} \qquad .....(4\text{-}36)$$

حيث $\vec{u}\,t$ الازاحة التي انزاحها المرجع B بعد من الزمن t .

معنى ذلك الوصف أن وصف أحدهما للموقع يختلف عن وصف الآخر.

وصف السرعة المتجهة $\vec{v}$: إن الشخص A سيصف سرعة النقطة P بالسرعة المتجهة $\vec{v}_{PA}$، والشخص B سيصف سرعة النقطة P بالسرعة المتجهة $\vec{v}_{PB}$، إن العلاقة بين السرعتين نحصل عليها من خلال ايجاد المشتقة الأولى للمعادلة (4-36)،

$$\frac{d\vec{r}_{PA}}{dt}=\frac{d\vec{r}_{PB}}{dt}+\frac{d\vec{r}_{BA}}{dt} \quad \text{أو} \quad \vec{v}_{PA}=\vec{v}_{PB}+\vec{u} \qquad .....(4\text{-}37)$$

أي إن سرعة النقطة P بالنسبة للشخص الثابت A تساوي سرعة النقطة P بالنسبة للشخص B المتحرك بسرعة ثابتة زائداً سرعة المرجع S' بالنسبة للمرجع الثابت S.

معنى ذلك الوصف أن وصف أحدهما للسرعة يختلف عن وصف الآخر.

المعادلتان (4-36) و (4-37) تعرفان باسم معادلتا تحويل جاليلو.

وصف التسارع $\vec{a}$: باشتقاق المعادلة (4-37) نحصل على:

$$\frac{d\vec{v}_{PA}}{dt}=\frac{d\vec{v}_{PB}}{dt}+\frac{d\vec{u}}{dt} \qquad ....(4\text{-}37)$$

وبما إن السرعة $\vec{u}$ ثابتة (سرعة المرجع S' بالنسبة للمرجع S)، فإن المعادلة (4-37) تصبح

$$\vec{a}_{PA}=\vec{a}_{PB} \qquad ....(4\text{-}38)$$

أي إن تسارع النقطة P بالنسبة للشخص الثابت A تساوي تسارع النقطة P بالنسبة للشخص B المتحرك بسرعة ثابتة . معنى ذلك الوصف أن وصف أحدهما للتسارع لا يختلف عن وصف الآخر.